IUFM de La Seyne-sur-Mer
Agrégation Interne

AUTOUR DU SUJET MINES-PONTS 09 - MP 1

T. CHAMPION

1. Rappels de cours

A votre programme, une fonction est *intégrable sur l'intervalle I* si elle est

(1) continue par morceaux sur tout segment inclus dans I (et donc sur I si I est un segment);
(2) son module est intégrable (i.e. son intégrale est finie (ou majorée)).

Dans le cas des intégrales multiples ou dépendant d'un paramètre, toutes les fonctions considérées sont *continues* (sur tout le domaine d'intégration). Seule exception: on a le droit d'appliquer Fubini à une fonction *positive continue* de deux variables (ou plus) multipliée par la fonction caractéristique d'un ensemble "géométriquement simple".

Rappels des théorèmes essentiels à votre programme, sur un intervalle I quelconque:

Théorème 1 (Convergence Monotone). *Soit $(f_n)_n$ une suite* croissante *de fonctions* à valeurs positives*, intégrables, et convergeant simplement vers une fontion f. Si les f_n et f sont continues par morceaux sur tout segment inclus dans I et si la suite $\left(\int_I f_n\right)_n$ est majorée, alors f est intégrable sur I et $\int_I f = \lim_n \int_I f_n$.*

Théorème 2 (Convergence Dominée). *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions* à valeurs complexes *convergeant simplement vers une fontion f. Si les f_n et f sont continues par morceaux sur tout segment inclus dans I et si la suite $(|f_n|)_n$ est majorée par une fonction g intégrable*[1] *sur I, alors f est intégrable sur I et $\int_I f = \lim_n \int_I f_n$.*

Théorème 3 (Continuité sous le signe somme). *Soit $f : X \times I \to \mathbb{C}$ une fonction* continue*, définie en tout point (x,t) du produit d'intervalles $X \times I$. On suppose que $f(x,.)$ est intégrable* [2] *sur I pour tout $x \in X$, et que de plus on a $|f(x,t)| \le g(t)$ pour tout couple $(x,t) \in X \times I$, où g est* continue *et intégrable sur I. Alors la fonction $F : x \mapsto \int_I f(x,t)dt$ est continue sur X.*

Théorème 4 (Dérivation sous le signe somme). *Soit $f : X \times I \to \mathbb{C}$ une fonction* continue*, définie en tout point (x,t) du produit d'intervalles $X \times I$. On suppose que $f(x,.)$ est intégrable* [3] *sur I pour tout $x \in X$, et qu'elle admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. De plus, on suppose $|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \le g(t)$ pour tout couple $(x,t) \in X \times I$, où g est* continue *et intégrable sur I. Alors la fonction $F : x \mapsto \int_I f(x,t)dt$ est dérivable sur X de dérivée $F : x \mapsto \int_I \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$.*

Théorème 5 (Fubini). *Soit $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ une fonction* continue*, définie en tout point (x,y) du produit d'intervalles $X \times Y$. Si le module de f est intégrable*[4]*, alors on peut intervertir l'ordre des intégrations dans le calcul de l'intégrale double de f sur $X \times Y$.*

[1] en particulier g doit aussi être continue par morceaux!
[2] en particulier $f(x,.)$ doit être continue par morceaux!
[3] en particulier $f(x,.)$ doit être continue par morceaux!
[4] puisque f est continue, son module l'est aussi, ne reste qu'à vérifier que son intégrale est majorée.

2. Commentaires sur le corrigé du sujet Mines-Ponts 09 - 1 MP

1) Le programme des classes préparatoires diverge légèrement de celui de l'agrégation interne.

Il faut d'abord vérifier que ϕ_f est bien définie dès que $f \in E$ (car alors $(x,t) \mapsto e^{ixt}f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et son module est intégrable).

Puis démontrer par récurrence sur $n \geq 1$ que

$$\phi_f^{(n-1)} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ de dérivée } \phi_f^{(n)} : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} (ix)^n e^{ixt} f(x)dx.$$

Pour cela, vérifier toutes les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe somme, en invoquant que f a un moment d'ordre n.

Remarque: l'initialisation et l'hérédité de la récurrence se démontrent en fait de manière très similaire.

3) On peut aussi reconnaître deux quotients différentiels pour $t \mapsto e^{-ita}$ et $t \mapsto e^{-itb}$ en $t = 0$:

$$h_{a,b}(t) = \frac{1}{i}\frac{e^{-ita} - e^0}{t-0} - \frac{1}{i}\frac{e^{-itb} - e^0}{t-0} \qquad \to \qquad \frac{1}{i}(-ia - (-ib)) = b - a.$$

5) Faute de frappe: lire $\frac{k^k}{k!}$ au lieu de $\frac{e^k}{k!}$.

7) Il y a donc 9 cas à détailler:

$$\lim_{T\to+\infty} R(x,T) - R(y,T) = \begin{cases} 2\pi & \text{si } x > 0 \text{ et } y < 0, \\ \pi & \text{si } x > 0 \text{ et } y = 0, \text{ ou } x = 0 \text{ et } y < 0, \\ 0 & \text{si } x = y = 0, \text{ ou } x, y > 0, \text{ ou } x, y < 0, \\ -\pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y = 0, \text{ ou } x = 0 \text{ et } y > 0, \\ -2\pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y > 0, \end{cases}$$

8) Pour ce qui concerne l'agrégation interne, le point de la correction commençant par "Vérifions grâce au théorème de Fubini" doit être simplement: constater que $(t,x) \mapsto h_{a,b}(t)e^{itx}f(x)$ est continue sur $[-T,T] \times \mathbb{R}$ et son module est intégrable sur ce produit d'intervalles.

De plus, le passage à la limite peut être obtenu directement, avec une suite quelconque $T_n \to +\infty$, grâce au théorème de convergence dominée. Il est inutile de s'intéresser d'abord au cas particulier $T_n = n$.

9) Pour dériver l'égalité $\int_a^x f = \int_a^x g$ et en déduire $f(x) = g(x)$ pour tout $x > a$, il faut préciser que f et g sont continues car dans E.

On peut aussi procéder par l'absurde: si $f - g \neq 0$, alors sans perte de généralité on peut supposer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $(f-g)(x) > 0$. Alors par continuité de $f - g$ il existe un voisinnage $]a,b[$ de x tel que $f - g > 0$ sur $]a,b[$, et donc $\displaystyle\int_a^b f - g > 0$ ce qui contredit $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b g$.

10) Justification de $\lim_{x\to 0} f_0(x) = 0$: si $0 < x < e^{-3}$ alors $\ln(x)^2 > ln(x)ln(e^{-3})$ donc

$$0 < f_0(x) < \frac{exp(3ln(x)/2)}{x} = \sqrt{x}$$

et on conclut par le théorème des gendarmes.

10) et après Pour les changements de variable $u = \ln(x)$, il faut commenter le fait que ln est bien une bijection de classe C^1 de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

14) Faute de frappe: il y a un seul $\forall k \in \mathbb{N}$ dans la conclusion encadrée.

15) Faute de frappe: il faut lire $\phi_f^{(n)}(t)$ au lieu de $\phi_n(t)$.

15) Faute de frappe: il manque le signe $=$ avant $\phi_g^{(k)}(0)$.

16) Faute de frappe: il faut lire $\phi_f^{(m)}$ au lieu de $f^{(m)}$, et $\phi_g^{(m)}$ au lieu de $g^{(m)}$.