CAPES 2006 - Enoncé de la première épreuve écrite

1 Présentation du jeu.

1.1 Les règles du jeu.

Le « tournoi »est un jeu comportant une suite de manches (appelées « duels ») opposant deux joueurs, jamais plus. Les joueurs vont entrer en jeu successivement, tant qu'aucun d'entre eux n'aura été déclaré vainqueur, et forment ainsi une suite $(J_0, J_1, \ldots)$ aussi longue qu'il faudra, ce qui nous conduit à considérer une suite infinie de joueurs notée $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Le premier duel oppose J_0 et J_1, le vainqueur reste en jeu et se voit opposer J_2 qui entre pour le deuxième duel. Plus généralement, le n-ième duel ($n \geqslant 2$) oppose le joueur J_n, qui entre alors en jeu, au vainqueur du duel précédent, le perdant quittant le jeu.
On convient enfin que le premier joueur qui remporte N duels, nécessairement consécutifs, est déclaré vainqueur et que le jeu prend fin. N est un entier fixé à l'avance, au moins égal à 2, et valable pour tout le déroulement du tournoi.
Le but de ce problème est de rendre compte de ce type de jeu en en proposant diverses modélisations probabilistes. On s'intéressera ainsi plus particulièrement à la durée du jeu, c'est-à-dire au nombre de duels ayant eu lieu avant la proclamation du vainqueur.

1.2 Les règles communes aux différentes modélisations aléatoires.

La succession des duels en parfaitement décrite si on connait, pour chacun, les numéros des participants et le numéro du gagnant, cela tant que le jeu continue, c'est-à-dire tant qu'aucun des joueurs n'a été déclaré vainqueur. On supposera que chaque duel est un jeu de hasard, on considèrera ainsi le n-ième duel comme un épreuve aléatoire $\mathcal{E}_n$, dont on observera les résultats possibles.
On présupposera, sans chercher à l'expliciter, l'existence d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ permettant de modéliser le jeu et on s'attachera à décrire l'univers des possibles, c'est à dire les issues des différentes épreuves, ainsi que la manière dont on affecte des probabilités aux résultats observés. Les modèles proposés devront respecter les règles suivantes :

1. Le premier duel : la probabilité que le résultat de $\mathcal{E}_1$ soit 1 (J_1 est le gagnant du premier duel) est p, où p est un élément de $]0,1[$ fixé dans tout le problème, le résultat étant 0 avec la probabilité $(1-p)$.
2. Les duels successifs :
   (a) Pour $n \geqslant 2$, l'épreuve $\mathcal{E}_n$, si elle a lieu, ne depend de celles qui l'on précédées que par le numéro du joueur opposé à J_n (celui qui a remporté le duel précédent).
   (b) La probabilité pour J_n de remporter ce duel (le résultat est n) est égale à p_n, où $(p_k)_{k\geqslant 2}$ est une suite d'éléments de $]0,1[$, le joueur qui lui est opposé étant vainqueur avec une probabilité $1-p_n$.

On admettra par ailleurs que, pour toute suite $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements disjoints et dont la réunion est de probabilité 1, il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P[X = n] = P(\mathcal{A}_n)$$

2 Préliminaires.

On se propose ici de démontrer divers résultats qui pourront être utilisés dans la suite du problème.

2.1 Résultat 1.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites à termes positifs vérifiant :

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} y_n$$

1. Justifier, pour tout ε strictement positif, l'existence d'un entier naturel non nul n_0 tel que pour tout n supérieur ou égal à n_0 on ait :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} x_k - \sum_{k=0}^{n} y_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=0}^{n_0-1}(x_k - y_k)\right| + \varepsilon \sum_{k=n_0}^{n} x_k$$

2. En déduire que, si la série de terme général x_n est divergente, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} x_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} y_k$$

2.2 Résultat 2.

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes positifs telle que la série de terme général u_n soit convergente.

1.a. Montrer qu'on définit une suite de réels par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Quelle est la nature de cette suite ?

1.b. Justifier pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=1}^{n} k u_k = \sum_{k=0}^{n-1} v_k - n v_n$$

1.c. Montrer que si la série de terme général v_n est convergente, alors la série de terme général nu_n est convergente.

1.d. Montrer que si la série de terme général nu_n est convergente alors la suite de terme général nv_n converge vers 0.

Indication : On pourra éventuellement, après l'avoir justifiée, utiliser la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n-1} = \sum_{k\geqslant n}(v_{k-1} - v_k)$$

pour majorer l'expression nv_{n-1}, lorsque n est un entier naturel non nul.

1.e. En déduire que les séries de termes généraux respectifs nu_n et v_n sont simultanément convergentes et de même somme.

2. Dans cette question, X désigne une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Déduire de ce qui précède qu'elle admet une espérance si et seulement si la série de terme général $P[X > n]$ est convergente et qu'on a alors l'égalité :

$$E[X] = \sum_{n=0}^{+\infty} P[X > n]$$

2.3 Résultat 3.

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes positifs telle que la série entière $\sum a_n x^n$ admette un rayon de convergence R strictement positif. On note :

$$\forall x \in]-R,R[, f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$$

1. Montrer que $f(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers R sur $[0,R[$ si et seulement si f est majorée sur $[0,R[$.
On suppose dans la suite de cette partie que l'une de ces conditions équivalentes est réalisée et on note L la limite.
2.a. Montrer que, pour tout n entier naturel :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k R^k \leqslant L$$

2.b. En déduire que la série de terme général $a_n R^n$ est convergente.
2.c. Montrer que la série entière est normalement convergente sur $[-R,R]$. En déduire que :

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n R^n = \lim_{x\to R^-} f(x)$$

3 Première modélisation : le cas particulier $N = 2$.

Dans cette section on observe la suite des numéros des différents vainqueurs successifs. L'univers des possibles est alors l'ensemble des listes (éventuellement infinies) représentant les numéros des joueurs vainqueurs aux différents combats. Ainsi : $(0,2,3,3)$ représentera un jeu de 4 combats remportés successivement par J_0, J_2, J_3 et J_3 qui est alors déclaré gagnant du tournoi, ce qui met fin à celui-ci. On note D_n, pour n au moins égal à 2, l'événement : « le jeu s'arrête à l'issue du n-ième duel$\gg$.
1.a. Expliciter D_2 à l'aide de la modélisation proposée.
1.b. Plus généralement, expliciter D_{n+1} lorsque n est un entier au moins égal à 2.
2. Dans cette question on suppose que, pour tout $n \geqslant 2$, p_n est égal à p.
2.a. Calculer $P(D_n)$ pour n supérieur ou égal à 2. Vérifier que $\bigcup_{n\geqslant 2} D_n$ est un événement de probabilité 1. Interpréter ce résultat.
2.b. On peut alors considérer une variable aléatoire T égale au nombre de duels qui ont effectivement eu lieu lorsque le jeu s'arrête. Calculer, après avoir justifié leurs existences, son espérance et sa variance.
3. On revient au cas général où, pour tout i au moins égal à 2, p_i est un réel élément de $]0,1[$. On pose pour tout n au moins égal à 2 :

$$\beta_n = \prod_{i=2}^{n} p_i$$

Exprimer, pour n au moins égal à 2, $\sum_{k=2}^{n} P(D_k)$ en fonction de la suite $(\beta_k)_{k\geqslant 2}$. En déduire que $\bigcup_{n\geqslant 2} D_n$ est un événement de probabilité 1 si et seulement si β_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
Lorsque cette condition est vérifiée on définira T comme à la question 2.b. et on posera, pour $n \geqslant 2$:

$$u_n = \beta_n - \beta_{n+1}$$

Jusqu'à la fin de cette section 3. on suppose qu'il existe un réel α strictement positif tel que, pour tout i au moins égal à 2, l'égalité suivante soit vérifiée :

$$p_i = 1 - \frac{1}{i^\alpha}$$

4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $\bigcup_{n \geqslant 2} D_n$ soit un événement de probabilité 1.
Indication : on pourra s'intéresser à la suite de terme général $-\ln(\beta_n)$.
5. Dans cette question, α est égal à 1. Donner une loi de T. T admet-elle une espérance ?
6. Dans cette question on suppose : $0 < \alpha < 1$.
6.a. Justifier l'équivalence lorsque n tend vers l'infini :

$$\sum_{k=2}^{n} (-\ln(p_k)) \sim \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

6.b. Après avoir justifié pour tout entier k au moins égal à 2 l'inégalité :

$$\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^\alpha} dx \leqslant \frac{1}{(k-1)^\alpha}$$

démontrer l'équivalence lorsque n tend vers l'infini :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

6.c. En déduire que, pour tout c réel strictement positif, la suite de terme général $\ln(n^c u_n)$ tend vers $-\infty$ puis que la série de terme général nu_n est convergente.
Que peut-on en conclure pour l'espérance de T ?

4 Deuxième modélisation : le cas où les probabilités sont constantes.

Dans cette section et jusqu'à la fin du problème N est un entier supérieur ou égal à 3 et on suppose, pour tout n supérieur ou égal à 2 : $p_n = p$. On notera : $q = 1 - p$.
Pour tout n entier naturel, on note A_n l'événement « le joueur J_n participe à au moins un duel »et G_n l'événement « le joueur J_n est vainqueur du tournoi ».

4.1 Cas particulier : $N = 3$ et $p = 1/2$.

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(G_n) = \frac{1}{8} P(A_n)$$

2. Montrer que les événements A_0, A_1, A_2 et A_3 sont des événements certains.
3.a. Dans cette question, n est un entier supérieur ou égal à 4. On introduit les événements $A_{n,k}$ « le n-ième duel a lieu et oppose J_n et J_{n-k} ». Montrer que la probabilité de $A_{n,k}$ est nulle si k est différent de 1 ou de 2.
En déduire alors pour $n \geqslant 4$:

$$P(A_n) = \frac{1}{2} P(A_{n-1}) + \frac{1}{4} P(A_{n-2})$$

3.b. On désigne par r_1 et r_2 ($r_1 < r_2$) les deux racines de l'équation :

$$r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{4}$$

Vérifier que, pour $n \geqslant 2$, on a :

$$P(A_n) = \frac{4}{\sqrt{5}}\left[r_2^n - r_1^n\right]$$

3.c. En déduire que la probabilité que le jeu s'arrête est égale à 1. On pourra alors considérer une variable aléatoire T égale au nombre de duels qui ont effectivement eu lieu lorsque le jeu s'arrête.
Calculer : $P[T = 3]$.
Montrer que, pour $n \geqslant 4$:

$$P[T = n] = P[G_{n-2}]$$

En déduire une expression de $P[T = n]$ pour $n \geqslant 4$ puis l'espérance de T.
Indication : Pour 4.1.3.b. et 4.1.3.c. il pourra être intéressant de mener formellement dans un premier temps les calculs en fonction de r_1 et de r_2 et d'utiliser ensuite leur somme et leur produit.

4.2 Etude du cas général.

On revient au cas général : $N \geqslant 3$ et p est élément de $]0,1[$. On posera de plus, pour tout n entier naturel :

$$a_n = P(A_n) \text{ et } g_n = P(G_n)$$

1.a. Calculer g_0. Que vaut a_k pour $0 \leqslant k \leqslant N$?
1.b. Montrer que la série de terme général g_n est convergente.
1.c. Justifier, pour tout n non nul, la relation :

$$g_n = p(1-p)^{N-1}a_n$$

En déduire que la série de terme général a_n est convergente. On posera :

$$S = \sum_{n \geqslant 1} a_n$$

2.a. En considérant à nouveau les événements $A_{n,k}$ définis dans la partie précédente, justifier, pour n strictement supérieur à N, la relation :

$$a_n = \sum_{k=1}^{N-1} p(1-p)^{k-1}a_{n-k}$$

Exprimer a_{N+1} en fonction de p et de N.
2.b. En sommant les égalités précédentes, montrer l'égalité :

$$(1-p)^{N-1}S = \sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{k=1}^{N-1}\sum_{i=k}^{N-1} p(1-p)^{k-1}a_{N-i}$$

En utilisant une interversion d'indice dans la somme double, puis la question 1.a. calculer S.
En déduire la somme de la série de terme général g_n, puis que la probabilité que le jeu se termine est égale à 1.

3. On notera T une variable aléatoire égale au nombre de duels ayant eu lieu jusqu'à l'arrêt du jeu.
3.a. Exprimer a_n et g_n en fonction de T.
3.b. En utilisant le résultat 2 des préliminaires montrer que T admet une espérance et donner l'expression de $E[T]$ en fonction de p et de N. Retrouver le résultat relatif à $E[T]$ de la question 4.1.3.c.
La formule obtenue vaut aussi pour $N = 2$; retrouver ainsi le résultat de la question 3.2.b.
Déterminer l'espérance de T pour N quelconque et $p = 1/2$.
3.c. Démontrer, pour $n \geqslant N+1$:

$$(\mathcal{R})\ a_n - a_{n+1} = p(1-p)^{N-1} a_{n-N+1}$$

5 Comportement asymptotique de la loi de T.

5.1 Un lemme.

Démontrer que, pour tout entier naturel r non nul et toute famille $(z_1, \ldots, z_r)$ de complexes non nuls, l'égalité :

$$\left| \sum_{k=1}^{r} z_k \right| = \sum_{k=1}^{r} |z_k|$$

n'est réalisée que lorsque :

$$\forall k \in \mathbb{N}, (2 \leqslant k \leqslant r) \Rightarrow (\exists \lambda_k \in]0, +\infty[, z_k = \lambda_k z_1)$$

5.2 Etude d'une fonction associée à T.

1. Montrer qu'on peut définir une fonction Q par :

$$\forall x \in [-1, 1], Q(x) = \sum_{n \geqslant 0} P[T > n] x^n$$

Vérifier qu'elle est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$.
2. En utilisant la relation $(\mathcal{R})$ et en s'inspirant des techniques de calcul mises en oeuvre à la question 2.b. de la section 4.2, démontrer, pour tout x de $[-1, 1]$, la formule :

$$\left(1 - x + \frac{p}{1-p}(x(1-p))^N\right) Q(x) = 1 - (x(1-p))^N$$

3. Vérifier que les deux polynômes :

$$1 - X + \frac{p}{1-p}(X(1-p))^N \text{ et } 1 - (X(1-p))^N$$

admettent dans $\mathbb{C}$ une seule racine commune et que celle-ci est simple et réelle. En déduire la relation :

$$Q(x) = 1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{pB(x)} \text{ avec } B(x) = \sum_{k=1}^{N-1} p(1-p)^{k-1} x^k - 1$$

5.3 Etude des racines de B.

1. Etudier les variations de B sur $\mathbb{R}^+$. Calculer $B(1)$. En déduire que B admet une unique racine réelle positive ρ_N élément de $]1,+\infty[$ et que cette racine est simple.
2. En utilisant le lemme, montrer que les racines complexes de B sont de module strictement supérieur à ρ_N.
3. D'après ce qui précède, les pôles de Q sont en particulier de module strictement supérieur à 1. Aurait-on pu prévoir directement ce résultat ?

5.4 Recherche d'équivalent.

On note $\{z_1,\dots,z_m\}$ les racines de B dans $\mathbb{C}$ de multiplicités respectives ν_k.
1. Justifier l'existence d'une famille de complexes non nuls telle que, pour tout complexe z de module inférieur ou égal à 1 on ait :

$$\frac{1}{B(z)} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{\nu_k} \frac{\lambda_{k,s}}{(z-z_k)^s}$$

2. Dans cette question s et k sont fixés et z désigne un complexe de module inférieur ou égal à 1.
2.a. Justifier l'égalité :

$$\frac{1}{(z_k-z)^s} = \sum_{n\geqslant 0} C_{n+s-1}^{s-1} \frac{z^n}{z_k^{n+s}}$$

2.b. En déduire, pour tout k, l'existence d'un polynôme P_k de degré inférieur ou égal à $\nu_k - 1$ tel que :

$$\sum_{s=1}^{\nu_k} \frac{\lambda_{k,s}}{(z-z_k)^s} = \sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{P_k(n)}{z_k^n}\right) z^n$$

2.c. En déduire une expression de a_{n+1} pour $n \geqslant 1$.
3.a. Montrer, à l'aide des questions précédentes, l'existence d'un réel K tel qu'on ait :

$$a_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{{\rho_N}^n}$$

3.b. Donner une expression de K en fonction de p, B et ρ_N. En déduire un équivalent à l'infini de $P[T=n]$.