DEUXIEME EPREUVE

Commentaires:

La présence des séries de Fourier, dans l'énoncé, a semble t'il perturbé beaucoup de candidats. Les théorèmes à utiliser dans le problème étaient le théorème de convergence quadratique, ou théorème de Parseval, pour les fonctions périodiques, continues par morceaux, et le théorème de convergence ponctuelle, ou théorème de Dirichlet, pour les fonctions périodiques, continues, de classe C^1 par morceaux.

Comme l'indiquait le préambule, les candidats avaient la possibilité de traiter les parties I.A et III qui ne comportaient pas de séries de Fourier.

I.A. Une intégration par parties permet de montrer la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin\ t}{t} dt$. La partie I.A généralise cette méthode.

L'erreur suivante figure dans de nombreuses copies:

"*la fonction* f *étant bornée par* M *on a :* $\left| \int_1^X t^{-\alpha}\ f(t)\ dt \right| \leq M \int_1^X t^{-\alpha}\ dt$, or *on a* $\alpha > 1$, *donc l'intégrale* $\int_1^{-\infty} t^{-\alpha}\ dt$ *converge et par suite* (!) *l'intégrale* $\int_1^{-\infty} t^{-\alpha}\ f(t)\ dt$ *converge* "

A la question I.A.3ii beaucoup de candidats ont montré que si l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{|f(t)|}{t}\ dt$ converge alors $\int_0^{2\pi} |f(t)|\, dt = 0$, peu ont conclu à la nullité de f.

I.B. Des erreurs dans le calcul des coefficients de Fourier de θ ont conduit à des valeurs inexactes des sommes des séries $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$ et $\sum_{n\geq 1} 1/n^4$. Il convient de remarquer que l'utilisation d'une calculatrice permet une rapide vérification de la vraisemblance des résultats obtenus.

II.A. En général, les théorèmes sur la dérivation et l'intégration de la limite d'une suite de fonctions ont été utilisés correctement.

II.B. Le passage en coordonnées polaires, dans une intégrale double, est une technique qui devrait être connue par les candidats, cette méthode est utilisée classiquement pour le calcul de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\ dx$.

III. Cette partie n'a été que peu abordée.

La méthode de la majoration du reste d'une série alternée permettait d'établir l'inégalité A.1., il fallait cependant justifier l'utilisation de cette méthode par la décroissance vers o de la valeur absolue du terme général de la série.

Corrigé

I.A.1. f est continue périodique, donc bornée (par M).

L'inégalité $\left|\frac{f(t)}{t^\alpha}\right| \leq \frac{M}{t^\alpha}$ montre alors la convergence absolue et donc la convergence de l'intégrale pour $\alpha>1$.

I.A.2.i) Soit F une primitive de f, alors on a:

$$F(x+2\pi)-F(x) = \int_x^{x+2\pi} f(t)dt = \int_0^{2\pi} f(u)du.$$

Ainsi F est périodique si et seulement si $c_0(f) = 0$.

ii) La fonction $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f}(t) = f(t)-c_0(f)$ vérifie $c_0(\tilde{f}) = 0$, donc elle possède une primitive $\tilde{F}$ 2π-périodique. On a donc pour tout $X > 1$:

$$\int_1^X \frac{\tilde{f}(t)}{t^\beta} dt = \frac{\tilde{F}(X)}{X^\beta} - \tilde{F}(1) + \beta \int_1^X \frac{\tilde{F}(t)}{t^{1+\beta}} dt.$$

$\tilde{F}$ est bornée et $1+\beta>1$, d'où la convergence de l'intégrale d'après **I.1**.

I.A.3.i) On a : $\lim\limits_{X\to\infty} \left(\int_1^X \frac{f(t)}{t^\beta} dt - c_0(f)\int_1^X \frac{dt}{t^\beta}\right) = \int_1^\infty \frac{f(t) - c_0(f)}{t^\beta} dt$, et $\int_1^\infty \frac{dt}{t^\beta}$ diverge, donc $\int_1^X \frac{f(t)}{t^\beta} dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{c_0(f)}{1-\beta} X^{1-\beta}$ si $0<\beta<1$, et $\int_1^X \frac{f(t)}{t} dt \underset{+\infty}{\sim} c_0(f)\ln X$

ii) D'après ce qui précède l'intégrale $\int_1^\infty \frac{|f(t)|}{t} dt$ converge ssi $c_0(|f|) = 0$, or f est continue donc $c_0(|f|) = 0$ équivaut à $f \equiv 0$.

iii) On a: $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\sin t|dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin t|dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin t|dt = \frac{2}{\pi}$,

donc $\int_0^X \frac{|\sin t|}{t} dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln X.$

I.B.1.i) f est continue par morceaux, donc d'après la formule de Parseval la série $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2$ est convergente de somme $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2dt.$

ii) Soit $0 = x_0<x_1<\cdots<x_n = 2\pi$ une subdivision de $[0,2\pi]$ telle que la restriction de f à $[x_p,x_{p+1}]$ soit de classe C^1.

En intégrant par parties on a :

$$k\int_{x_p}^{x_{p+1}} f(t)e^{-ikt} dt = \left[if(t)e^{-ikt}\right]_{x_p}^{x_{p+1}} -i\int_{x_p}^{x_{p+1}} f'(t)e^{-ikt} dt.$$

En sommant de 0 à $n-1$, les $if(x_p)e^{-ikx_p}$ se réduisant 2 à 2 ; donc :

$$k\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt} dt = -i\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-ikt} dt, \text{ d'où : } c_k(f') = ikc_k(f).$$

L'argument précédent s'applique à f', d'où la convergence de $\sum_{-\infty}^{+\infty} k^2|c_k(f)|^2$.

Pour tout entier $N>1$ l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\sum_{\substack{k=-N\\k\neq 0}}^{+N} |c_k(f)| = \sum_{\substack{k=-N\\k\neq 0}}^{+N} \frac{1}{k}.k|c_k(f)| \leq \left(\sum_{\substack{k=-N\\k\neq 0}}^{+N} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2}.\left(\sum_{k=-N}^{+N} k^2|c_k(f)|^2\right)^{1/2},$$

d'où la convergence de la série et la majoration :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)| \leq |c_0(f)| + \left(2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2}.\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

I.B.2. On a $c_k(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} t^2 e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{ik}c_k(\theta') = \frac{1}{2i\pi k}\int_{-\pi}^{+\pi} 2t\,e^{-ikt}\,dt$

d'où $c_k(\theta) = \frac{1}{\pi k^2}[\pi e^{-ik\pi} + \pi e^{ik\pi}] = \frac{1}{k^2}2(-1)^k$ pour $k \neq 0$.

Et $c_0(\theta) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\pi}^{+\pi} = \frac{\pi^2}{3}$.

θ est <u>continue</u> et de classe C^1 par morceaux, donc d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de θ converge (uniformément) vers θ. Ce qui donne pour $t \in [-\pi,+\pi]$:

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k\geq 1}\frac{2(-1)^k}{k^2}(e^{ikt} + e^{-ikt}) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{4\cos kt}{k^2}.$$

On a donc pour $t = 0$: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$, pour $t = \pi$: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

De plus la formule de Parseval donne : $\frac{\pi^4}{9} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^4} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} t^4\,dt = \frac{\pi^4}{5}$,

d'où : $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

I.B.3. L'inégalité obtenue au **I.B.1.ii)** donne d'après le théorème de Dirichlet

$$|f(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt|^2 = |\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{+\infty} c_k(f)e^{ikx}|^2$$

or on a: $|\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{+\infty} c_k(f)e^{ikx}|^2 \leq \left(\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{+\infty}|c_k(f)|\right)^2 \leq (2.\frac{\pi^2}{6}).(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f'(t)|^2dt)$

d'où : $|f(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt|^2 \leq \frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi}|f'(t)|^2dt.$

On a pour $x \in [-\pi,+\pi]$: $|\theta(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\theta(t)dt|^2 = |x^2 - \frac{\pi^2}{3}|^2$ et

$\frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi}|\theta'(t)|^2dt = \frac{4\pi^4}{9}$, d'où $|\theta(\pi) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\theta(t)dt|^2 = \frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi}|\theta'(t)|^2dt.$

(Complément: Soit φ de classe C^1 par morceaux, 2π-périodique vérifiant :

il existe x_0 tel que $|\varphi(x_0) - c_0(\varphi)|^2 = \frac{\pi^2}{3}c_0(|\varphi'|^2)$

d'après **I.B.1.ii)** on a alors :

$$\Big|\sum_{k\neq 0} c_k(\varphi)e^{ikx_0}\Big| = \sum_{k\neq 0} |c_k(\varphi)| = \Big(\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}\Big)^{1/2}.\Big(\sum_k k^2\,|c_k(\varphi)|^2\Big)^{1/2}\ ;$$

de la première égalité on déduit l'existence d'un réel α tel que

$$c_k(\varphi)e^{ikx_0} = |c_k(\varphi)|e^{i\alpha} \quad \text{pour} \quad k\neq 0\ ;$$

de la deuxième égalité on déduit l'existence d'un réel ρ tel que :

$$k^2|c_k(\varphi)|^2 = \frac{\rho}{k^2} \quad \text{pour} \quad k\neq 0.$$

Donc pour $k\neq 0$ on a : $c_k(\varphi) = \rho e^{i\alpha}\,\dfrac{1}{k^2}\,e^{-ikx_0} = \dfrac{\rho e^{i\alpha}}{2}\,c_k(\theta).e^{-ik(x_0-\pi)}$.

Les fonctions φ vérifiant l'égalité sont donc de la forme :

$$\varphi(t) = \lambda\theta(t+t_0)+\mu \qquad \lambda\in\mathbb{C},\ \ \mu\in\mathbb{C},\ \ t_0\in\mathbb{R}.)$$

II.A.1. Soit $a>0$. Dès que $|n| > \dfrac{a}{2\pi}$ on a $|g(x+2\pi n)| \le \dfrac{M}{|x+2\pi n|^{\alpha}} \le \dfrac{M}{(2\pi|n|-a)^{\alpha}}$ pour $x\in[-a,+a]$, ceci montre la convergence normale de $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}|g(x+2\pi n)|$ sur l'intervalle $[-a,+a]$, la suite $(G_N)_{N\ge 0}$ est donc uniformément convergente sur les intervalles bornés.

II.A.2. Le raisonnement précédent appliqué à $|g'(x+2\pi n)|$ montre la convergence uniforme de $(G'_N)_{N\ge 0}$ sur les intervalles bornés. Donc G est de classe C^1 et $G'(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} g'(x+2\pi n)$. La périodicité de G est évidente.

II.A.3. L'inégalité $|g(t)e^{-ikt}| \le \dfrac{M}{|t|^{\alpha}}$ pour $t\neq 0$, montre la convergence en $+\infty$ et $-\infty$ des intégrales. La convergence uniforme de $(G_N)_{N\ge 0}$ vers G sur $[0,2\pi]$ donne :

$$c_k(G) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G_N(t)e^{-ikt}\,dt = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=-N}^{+N}\int_0^{2\pi} g(t+2n\pi)e^{-ikt}\,dt,$$

d'où: $$c_k(G)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{+N}\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} g(u)e^{-iku}\,du = \lim_{N\to\infty}\int_{-2N\pi}^{2(N+1)\pi} g(u)e^{-iku}\,du$$

donc: $$c_k(G)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)e^{-iku}du.$$

D'après le théorème de Dirichlet on a : $G(0) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_k(G)$, d'où l'égalité cherchée.

II.A.4. La fonction g définie par $g(u) = h(\frac{\lambda u}{2\pi})$ est de classe C^1 et vérifie la condition (R), or :

$$2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(2n\pi) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n\lambda) \ \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-\frac{2i\pi}{\lambda}kt}\,dt = \frac{2\pi}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)e^{-iku}\,du,$$

donc: $\lambda \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-\frac{2i\pi}{\lambda}kt} dt.$

II.B.1. Le passage en coordonnées polaires donne :

$$\int_{D(r)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = 2\pi \int_0^r e^{-\rho^2}\rho d\rho = \pi(1-e^{-r^2}).$$

Pour $r>0$ on a : $D(r) \subset \Delta(r) \subset D(r\sqrt{2})$, la fonction $(x,y) \longrightarrow e^{-(x^2+y^2)}$ est positive donc :

$$\pi(1-e^{-r^2})=\int_{D(r)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \leq \int_{\Delta(r)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \leq \int_{D(r\sqrt{2})} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \pi(1-e^{-2r^2})$$

Or par intégrations successives on a : $\int_{\Delta(r)} e^{-(x^2+y^2)}dx\, dy = [\int_{-r}^{+r} e^{-x^2} dx]^2.$

II.B.2.i) D'après **B.1** on a $F(0) = \sqrt{\pi}$.

La fonction $f(x,y) = e^{-(x+iy)^2}$ est continue, dérivable en y et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2i(x+iy)e^{-(x+iy)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Donc pour tout n la fonction F_n est de classe C^1 et

$$F'_n(y) = \int_{-n}^{+n} -2i(x+iy)e^{-(x+iy)^2} dx = i\left[e^{-(x+iy)^2}\right]_{-\infty}^{+\infty}, \text{ c'est-à-dire :}$$

$$F'_n(y) = i\, e^{y^2}.e^{-n^2}\left[e^{-2iny} - e^{2iny}\right] = e^{y^2} e^{-n^2} \sin ny.$$

La majoration (pour $|y| \leq a$) : $|F'_n(y)| \leq e^{a^2} e^{-n^2}$ et la convergence de $F_n(0)$ vers $\sqrt{\pi}$ montrent que $(F'_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers 0 sur $[-a,+a]$ et que $(F_n)_{n\geq 0}$ converge (uniformément) sur $[-a,+a]$. La fonction F est donc de classe C^1 et $F' \equiv 0$.

ii) On a $F' \equiv 0$ donc $F(y) = F(0) = \sqrt{\pi}$ pour tout y, c'est-à-dire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-2ixy} dx = \sqrt{\pi}\, e^{-y^2}.$$

II.B.3. La fonction $h(x) = e^{-x^2}$ est de classe C^1 et vérifie la condition (R) de **II.A**, donc d'après l'égalité obtenue en **II.A.4** pour $\lambda = a\sqrt{\pi}$ on a :

$$a\sqrt{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a^2 k^2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-2i\frac{\sqrt{\pi}}{a}xk} dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\pi}{a^2}k^2}$$

d'où : $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a^2 k^2} = \frac{1}{a} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi k^2}{a^2}}.$

II.B.4. En posant $f_k(x) = e^{-\pi k^2 x}$ on a $f_k^{(p)}(x) = (-\pi k^2)^p\, e^{-\pi k^2 x}$, et pour tout $\varepsilon>0$ on a $|f_k^{(p)}(x)| \leq \pi^p k^{2p}\, e^{-\pi k^2 \varepsilon}$ pour $x \in [\varepsilon,+\infty[$. Or pour tout entier $p\in\mathbb{N}$ la série $\sum_{k=0}^{\infty} k^{2p}\, e^{-\pi k^2 \varepsilon}$ converge, d'où la convergence uniforme sur $[\varepsilon,+\infty[$ des séries $\sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(p)}$. Ψ est donc de classe C^∞.

On a $\Psi(x)-1 = 2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi k^2 x}$ et $e^{-\pi k^2 x} \leq e^{-\pi k x}$ donc :

$$0 \leq \Psi(x)-1 \leq 2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi k x} = 2\,\frac{e^{-\pi x}}{1-e^{-\pi x}} = \frac{2}{e^{\pi x}-1},\ (\text{d'où } \lim_{X\to\infty} \Psi(X) = 1).$$

L'égalité obtenue au **II.B.3** pour $a = \sqrt{x}$ donne $\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\,\Psi(\frac{1}{x})$, d'où :

$$\Psi(x) - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\,(\Psi(\tfrac{1}{x}) - 1) \text{ et par suite : } 0 \leq \Psi(x) - \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}\,\frac{2}{e^{\pi/x}-1},$$

il suffit pour conclure de remarquer que $\lim_{X\to+\infty} \frac{\sqrt{X}}{e^{\pi X}-1} = 0$.

III.A.1. En posant $f(u) = \ln(1+u)$ on a $f^{(p)}(u) = (-1)^{p-1}\,\frac{(p-1)!}{(1+u)^p}$, donc la formule de Taylor donne pour u dans $[0,1]$:

$$\Big|\ln(1+u) - \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1}\,\frac{u^n}{n}\Big| \leq \frac{u^{N+1}}{(N+1)!}\sup_{[0,u]} |f^{(N+1)}| = \frac{u^{N+1}}{N+1}.$$

Sur $[0,1]$ on a : $\Big|\frac{\ln(1+u)}{u} - \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1}\,\frac{u^{n-1}}{n}\Big| \leq \frac{u^N}{N+1} \leq \frac{1}{N+1}$,

par convergence uniforme on a donc :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,du = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{u^{n-1}}{n} = \frac{\pi^2}{12}\quad (\text{d'après } \textbf{I.B.2}).$$

III.A.2. On a $\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,du = \int_0^1 \frac{\ln(1+t^n)}{t^n}\,nt^{n-1}\,dt$, d'où :

$$\Big|n\int_0^1 \ln(1+t^n)dt - \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,du\Big| \leq n\int_0^1 \ln(1+t^n)\Big|1-\frac{1}{t}\Big|dt \leq n\int_0^1 t^n.\frac{1-t}{t}.dt$$

donc: $\quad \Big|n\int_0^1 \ln(1+t^n)dt - \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,du\Big| \leq \frac{1}{n+1}$.

Pour $\alpha=0$ on a donc $\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 \ln(1+t^n)dt = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,du = \frac{\pi^2}{12}$, et si $0\leq\alpha<1$ on a $n\int_0^\alpha \ln(1+t^n)dt \leq n\int_0^\alpha t^n\,dt = n\,\frac{\alpha^{n+1}}{n+1}$ qui tend vers 0 quand $n \longrightarrow \infty$.

D'où $\lim_{n\to\infty} n\int_\alpha^1 \ln(1+t^n)dt = \frac{\pi^2}{12}$.

III.A.3. Si $f(1) = 0$, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\alpha' \in [\alpha,1[$ tel que $|f(t)| \leq \varepsilon$ pour tout $t \in [\alpha',1]$. D'où :

$$|v_n| \leq \sup_{[\alpha,1]} |f(t)|.n\int_\alpha^{\alpha'} \ln(1+t^n)dt + \varepsilon.n\int_{\alpha'}^1 \ln(1+t^n)dt \quad \text{pour tout } n,$$

en posant $M = \sup_{[\alpha, 1]} |f(t)|$ et $M' = \sup_n n \int_0^1 \ell n(1+t^n)dt$ on a donc :

$$|v_n| \leq M.n \frac{\alpha'^{n+1}}{n+1} + \varepsilon M' \text{ pour tout entier } n.$$

Soit alors n_0 tel que $\alpha'^{n+1} < \varepsilon$ pour $n \geq n_0$, on a : $|v_n| \leq \varepsilon(M+M')$ pour $n \geq n_0$ donc $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$.

Dans le cas général on a donc : $\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^1 n(f(t)-f(1))\ell n(1+t^n)dt = 0$, donc $\lim_{n\to\infty} v_n = \frac{\pi^2}{12} f(1)$ d'après **A.2**.

III.B.1. On a : $|n^p I_n| \leq n^p \sup_{[a,b]} |f(t)| \int_a^b t^n dt \leq \sup_{[a,b]} |f(t)| \; n^p. \frac{b^{n+1}}{n+1}$ avec $b<1$ donc $\lim n^p I_n = 0$.

III.B.2. $\displaystyle\int_a^1 \frac{t^{n-1}}{1+t^n} tf(t)dt = \left[\frac{\ell n(1+t^n)}{n} .tf(t)\right]_a^1 - \int_a^1 \frac{\ell n(1+t^n)}{n} (f(t)+tf'(t))dt.$

Or $\left|\frac{\ell n(1+a^n)}{n} af(a)\right| \leq \frac{a^{n+1}}{n} |f(a)|$, donc $\frac{\ell n(1+a^n)}{n} af(a) = o(\frac{1}{n^2})$, et d'après **A.3**

$\displaystyle\int_a^1 \frac{\ell n(1+t^n)}{n} (f(t)+tf'(t))dt = \frac{f(1)+f'(1)}{n^2} \frac{\pi^2}{12} + o(\frac{1}{n^2})$, d'où le résultat.

III.B.3. Pour $a \geq 1$ on a :

$$\int_a^b \frac{t^n f(t)}{1+t^n} dt = \int_{1/a}^{1/b} - \frac{\frac{1}{u^n} f(\frac{1}{u})}{1 + \frac{1}{u^n}} \frac{du}{u^2} = \int_{1/b}^{1/a} \frac{\frac{1}{u^2} f(\frac{1}{u})}{1 + u^n} du$$

donc: $$\int_a^b \frac{t^n f(t)}{1+t^n} dt = \int_{1/b}^{1/a} \frac{1}{u^2} f(\frac{1}{u})du - \int_{1/b}^{1/a} \frac{u^n \frac{1}{u^2} f(\frac{1}{u})}{1+u^n} du$$

d'où : $I_n = \displaystyle\int_a^b f(t)dt - \int_{1/b}^{1/a} \frac{u^n g(u)}{1+u^n} du$ avec $g(u) = \frac{1}{u^2} f(\frac{1}{u})$.

On en déduit donc, d'après **III.B.2**, l'expression cherchée avec :

$\lambda=\mu=0$ si $a>1$, et si $a=1$ $\qquad \lambda = -g(1)\ell n\ 2 = -f(1)\ell n\ 2$

$$\mu = \frac{\pi^2}{12} (g(1)+g'(1)) = - \frac{\pi^2}{12} (f(1)+f'(1)).$$

D'où pour $a<1<b$, en écrivant I_n sous la forme:

$$I_n = \int_a^1 \frac{t^n f(t)}{1+t^n} dt + \int_1^b \frac{t^n f(t)}{1+t^n} dt, \text{ on a:}$$

$$I_n = \frac{f(1)\ell n\ 2}{n} - \frac{f(1)+f'(1)}{n^2} \frac{\pi^2}{12} + \int_1^b f(t)dt - \frac{f(1)\ell n\ 2}{n} - \frac{\pi^2}{12} (f(1)+f'(1)) + o(\frac{1}{n^2})$$

soit $I_n = \int_1^b f(t)dt - \frac{\pi^2}{6}\left(\frac{f(1)+f'(1)}{n^2}\right) + o(\frac{1}{n^2})$.

III.B.4. Si $\gamma<1$, on a :

$$\int_0^\gamma \frac{e^t}{1+t^n}dt = e^\gamma-1 - \int_0^\gamma \frac{t^n e^t}{1+t^n}, \text{ d'où : } \int_0^\gamma \frac{e^t}{1+t^n}dt = e^\gamma-1 + o(\frac{1}{n^2})$$

Si $\gamma=1$ on a : $\int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n}dt = e-1-(\frac{e\,\ln 2}{n} - \frac{e}{n^2}\frac{\pi^2}{6}) + o(\frac{1}{n^2})$, et pour $\gamma>1$:

$$\int_0^\gamma \frac{e^t}{1+t^n}dt = e^\gamma-1 -(e^\gamma-1-(e-1) - \frac{e}{n^2}\frac{\pi^2}{3}) + o(\frac{1}{n^2}) = e-1 + \frac{e}{n^2}\frac{\pi^2}{3} + o(\frac{1}{n^2}).$$

III.B.5. L'application $F_n(x)= \int_0^x \frac{e^t}{1+t^n}dt$ croît strictement de 0 à $+\infty$, d'où l'existence de x_n par continuité de F_n.

On a : $\int_0^{x_n} \frac{e^t}{1+t^n}dt = \alpha = \int_0^{\ln(1+\alpha)} e^t\,dt > \int_0^{\ln(1+\alpha)} \frac{e^t}{1+t^n}dt$, donc $x_n>\ln(1+\alpha) = \gamma$ pour tout n.

• Si $\alpha<e-1$, alors $\alpha = e^\gamma-1$ avec $\gamma<1$. Pour tout $\varepsilon \in\,]0,1-\gamma[$, d'après **B.4** il existe un entier n_0 tel que pour $n\geq n_0$ on a :

$\int_0^{x_n} \frac{e^t}{1+t^n}dt = e^\gamma-1 < \int_0^{\gamma+\varepsilon} \frac{e^t}{1+t^n}dt$. Donc $\gamma<x_n<\gamma+\varepsilon$ pour $n\geq n_0$, ainsi $\lim(x_n) = \gamma = \ln(1+\alpha)$.

• Si $\alpha>e-1$, alors quel que soit $A>1$ il existe n_0 tel que pour $n\geq n_0$:

$$\int_0^{x_n} \frac{e^t}{1+t^n}dt = \alpha > \int_0^A \frac{e^t}{1+t^n}dt \quad (cf. \textbf{ B.4} \text{ cas } A>1)$$

donc $x_n>A$ pour $n\geq n_0$ et $\lim(x_n) = +\infty$.

• Si $\alpha=e-1$, on a toujours $x_n > \ln(1+\alpha) = 1$, et si $\gamma>1$ on a :

$$\int_0^{x_n} \frac{e^t}{1+t^n}dt - \int_0^\gamma \frac{e^t}{1+t^n}dt = -\frac{e}{n^2}\frac{\pi^2}{3} + o(\frac{1}{n^2})$$

donc $x_n \leq \gamma$ à partir d'un rang n_0, d'où $\lim(x_n) = 1$.