Divers exercices de probabilité

Traiter en priorité les quatre premiers exercices de chaque section.

1 Probabilité

Exercice 1.1
Mon voisin a deux enfants.
1- Le plus jeune est une fille, quelle est la probabilité que l'autre soit aussi une fille ?
2- L'un d'eux est une fille, quelle est la probabilité que l'autre soit aussi une fille ?

Exercice 1.2
Soient A et B deux événements disjoints. A quelle condition sont-ils indépendants ?

Exercice 1.3
Une personne choisie au hasard parmi la population de la région passe un test pour dépister une maladie. Dans cette région, on a établi que :
- si une personne a la maladie, alors le test est positif dans 96% des cas,
- si une personne n'a pas la maladie, alors le test est négatif dans 94% des cas.

Le résultat du test est positif, quelle est la probabilité que cette personne soit atteinte de la maladie ? On traitera deux cas: d'abord le cas où la proportion de malades dans la population est égale à 5%, puis le cas où il est égal à 60%.

Exercice 1.4
On prend deux nombres au hasard et de manière indépendante dans $[0, 1]$. On sait que le plus petit des deux est supérieur à α.
Quelle est la probabilité que le second soit supérieur à β ? (On a bien sûr $0 < \alpha < \beta < 1$.)

Exercice 1.5
Une information booléenne (oui/non), supposée vraie, passe par n intermédiaires avant de me parvenir. Sachant que chaque personne intermédiaire ment avec la probabilité p, quelle est la probabilité p_n que je reçoive la bonne information ? Calculer $\lim p_n$.

2 Variables aléatoires discrètes

Exercice 2.1 *La loi géométrique*
Dans une urne, il y a une proportion p de boules noires et $q = 1 - p$ de boules blanches. On tire une boule, si elle est noire on arrête, sinon, on la remet dans l'urne et on recommence. Soit X la v.a. donnant le nombre de tirages nécessaires pour s'arrêter.
Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 2.2
On tire au hasard un nombre X dans $\{1, ..., n\}$ puis au hasard un nombre Y dans $\{1, ..., X\}$. Donner la loi de Y.

Exercice 2.3
Soit X et Y deux v.a. indépendantes de même loi géométrique de paramètre p.
1- Déterminer la loi de la v.a. $Q = \frac{X}{Y}$.
2- Calculer l'espérance de Q et montrer que $\mathbb{E}(Q) > 1$.

Exercice 2.4 *La loi de Poisson*
Soit n un entier non nul et $\lambda > 0$ fixé. On pose $p = \lambda/n$ et on note X_n une v.a.r. de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
1) Soit k un entier fixé et $n \geq k$. Montrer que $P(X_n = k) \to \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$ lorsque $n \to \infty$.
(indication: on peut s'en sortir sans la formule de Stirling!)
2) Vérifier que $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$. Cette loi est appelée loi de Poisson de paramètre λ.
3) Calculer, si existence, l'espérance et la variance d'une v.a.r. qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.
4) Soit X et Y deux v.a.r. indépendantes de loi de Poisson respectivement de paramètre λ et μ. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 2.5 *Promenade aléatoire dans* $\mathbb{Z}$
Etant sur un entier $k \in \mathbb{Z}$, un pas consiste en un déplacement de une unité, à droite $(+1)$ avec une probabilité $1/2$ et à gauche (-1) avec une probabilité $1/2$. On part de zéro, et on fait n pas. Soit S_n la v.a. donnant la position au bout de n pas.
1- Montrer que S_n peut être considéré comme une somme de n v.a. indépendantes de même loi.
2- Calculer l'espérance et la variance de S_n.
3- Calculer la probabilité p_n que $S_n = 0$. Calculer $\lim p_n$.
4- On suppose n grand. On se donne un intervalle I centré en 0. Calculer la limite de $P(S_n \in I)$.
5- n étant grand, donner un intervalle I_n où on est sûr à 95% que $S_n \in I_n$.
Pour 4- et 5-, on fera les approximations adéquates.

3 Variables aléatoires réelles à densité

Exercice 3.1
Soit X une v.a.r. qui suit une loi uniforme sur $[0, n]$, $n \in \mathbb{N}$ et $a \in]0, 1[$. Calculer $P([X, X + a] \cap \mathbb{N} = \emptyset)$.

Exercice 3.2
Soit X une v.a. de loi uniforme sur $] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Quelle est la loi de $Y = \tan(X)$?

Exercice 3.3
Dans le plan affine euclidien, on se donne un triangle isocèle rectangle OAB de sommet O. Soit X une v.a. de loi uniforme sur le segment $[OB]$. Déterminer la loi de la v.a. Θ qui donne l'angle géométrique OAX.

Exercice 3.4
Soit X une v.a.r. de fonction de répartition F supposée continue sur $\mathbb{R}$. Quelle est la loi de $Y = F(X)$?
On pourra d'abord supposer que F est strictement croissante sur un intervalle.

Exercice 3.5 *La loi exponentielle : la demi-vie*
Soit T une v.a.r. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
1- Montrer que $P(T \geq \mathbb{E}(T))$ est indépendant de λ.
2- Calculer le maximum p_λ de $t \mapsto P(T \in [t, 2t])$. La valeur de t où le maximum est atteint est appelé demi-vie, pourquoi?
3- Calculer λ et p_λ pour un atome de Radon 220 (la demi-vie d'un atome de Radon 220 est de 56s).

Exercice 3.6 *La désintégration nucléaire.*
A partir d'un instant 0, on s'intéresse à la désintégration nucléaire d'un atome, disons d'uranium 238. La v.a.r. "durée de vie" est notée T.
Pour $t > 0$, soit $G(t) := P(T > t)$ la probabilité que l'atome soit encore en vie à la date t. On pose également $F(t) := 1 - G(t)$.
On admet que si on considère un atome radioactif à un instant t, la probabilité qu'il ne soit toujours pas désintégré à la date $t' > t$ ne dépend que de la durée $t' - t$. C'est à dire, on admet que la durée T de vie d'un atome est indépendant du temps déjà écoulé, i.e. l'atome ne vieillit pas. On suppose en outre que les atomes n'interagissent pas entre eux.
1- Comment interpréter $F(t)$?
2- Montrer que pour tout $t > 0$ et $t' > 0$, on a $G(t + t') = G(t).G(t')$.
3- En déduire qu'il existe $\lambda > 0$, caractéristique du type d'atome considéré, tel que pour tout $t > 0$, F est donnée par $F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
4- Montrer que T est une v.a. à densité dont on donnera la densité f.
5- Calculer $\mathbb{E}(T)$ et $V(T)$.
6- Calculer la probabilité qu'un atome dépasse son espérance de vie.
7- Calculer la probabilité qu'un atome dépasse le double de son espérance de vie.
8- Calculer la demi-période τ définie par $P(T > \tau) = \frac{1}{2}$.
A l'instant 0, on a N atomes radioactifs. On s'intéresse au nombre X_N^t d'atomes désintégrés à la date $t > 0$.
9- Donner la loi de X_N^t.
10- Sachant que N est très grand et que t est négligeable par rapport à $\mathbb{E}(T)$, donner une loi de probabilité simple approchant celle de X_N^t (voir l'exercice précédent...).
On fera toutes les approximations nécessaires; on rappelle la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n \mathrm{e}^{-n}$.

Exercice 3.7
Dans le plan affine euclidien, on se donne un triangle isocèle rectangle OAB de sommet A. Soit M une v.a. de loi uniforme sur le segment $[AB]$. Montrer que la loi de la v.a.r. $X : M \mapsto OM$ est à densité non bornée.

Exercice 3.8
Soit X une v.a.r. Montrer que le nombre réel m défini (jsutifier!) par

$$m := \inf \left\{ t \,:\, P(X \leq t) \geq \frac{1}{2} \right\}$$

est tel que $\frac{1}{2} \leq P(X \leq m)$ et $\frac{1}{2} \leq P(X \geq m)$. A quelle condition ce nombre est-il unique ?

4 Vecteurs aléatoires

Exercice 4.1
Soit X et Y deux v.a. de Bernoulli. Montrer que $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$ si et seulement si X et Y sont indépendantes.

Exercice 4.2 *Problème de rencontre*
A et B ont rendez-vous en un lieu entre 12h et 13h. Les instants d'arrivée de A et B sont indépendants. Ils attendent un quart d'heure puis repartent. Calculer la probabilité qu'ils se rencontrent.

Exercice 4.3
Un point M du plan est choisi au hasard dans le disque unité centré à l'origine.
1) Quelles sont les lois des v.a. coordonnées X et Y ? Ces v.a. sont-elles indépendantes ?
2) Mêmes question avec les coordonnées polaires R et Θ.
3) Calculer la fonction de densité de R^2 et R.

Exercice 4.4
Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$ de loi à densité f donnée par $f(x, y) = \frac{2}{\mathrm{e}-1} x \mathrm{e}^y$ si $(x, y) \in [0, 1]^2$, et $f(x, y) = 0$ sinon.
1- Déterminer les densités des lois marginales.
2- X et Y sont-elles indépendantes ?

5 Inégalités et convergences

Exercice 5.1 *Inégalité de Markov*
Soit X une v.a.r. positive, montrer, pour les v.a. au programme, que pour tout $a > 0$ on a

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

Exercice 5.2 *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev*
Soit X une v.a.r., montrer, pour les v.a. au programme, que pour tout $a > 0$ on a

$$P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{1}{a^2} \mathbb{E}\Big[\Big(X - \mathbb{E}(X)\Big)^2\Big]$$

Exercice 5.3
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires telle que $\mathbb{E}(X_n) \to \mu$ et $V(X_n) \to 0$. Montrer alors que $X_n \to \mu$ en probabilité, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|X_n - \mu| > \varepsilon) \to 0$.

Exercice 5.4
Pour X_1, ..., X_n, n variables aléatoires indépendantes, de même loi de Bernoulli $B(p)$, on pose $F_n = \dfrac{X_1 + ... + X_n}{n}$, la v.a. qui modélise la fréquence de succès dans un schéma de Bernoulli.
1) Montrer que $\mathbb{E}(F_n) = p$ et $V(F_n) = \dfrac{p(1-p)}{n}$.
2) En déduire que la suite (F_n) converge en probabilité vers p.

Exercice 5.5 *La méthode de Monte-Carlo*
Soit (X_n) une suite de v.a.r. indépendantes suivant la même loi uniforme sur $[0, 1]$, et $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une application continue. On pose $Z_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(X_i)$.
Montrer que (Z_n) converge en probabilité vers une constante qu'on précisera.