**IUFM de La Seyne sur Mer**
**Préparation au CAPES 2009-2010**
**Thierry Champion**

# Probabilités

L'objet des probabilités est l'étude des expériences aléatoires.

**Définition.** *Une* expérience aléatoire *est une expérience qui conduit à des éventualités (ou réusltats) bien définis à l'avance mais de manière imprévisible.*

**Exemple.** Le jeu de pile ou face consiste à lancer une pièce de monnaie et regarder quel côté (parmi "pile" et "face") est encore visible une fois qu'elle est tombée. C'est une expérience aléatoire: il y a deux résultats possibles bien définis à l'avance, mais on ne peut pas prévoir quel sera le résultat effectivement obtenu pour une expérience.

## 1 Probabilité - Espace probabilisé

Dans toute la suite du fascicule, $\Omega$ est un ensemble non vide, et $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des parties de $\Omega$.

Pour chacune des définitions et notions suivantes, on précisera (lorsque cela a un intérêt) le cas où $\Omega$ est fini ou dénombrable.

### 1.1 Vocabulaire

- $\Omega$ est l'*univers* ou *univers des possibles*.
- Toute partie $A$ de $\Omega$ est appelée *évènement*.
- Pour tout élément $\omega$ de $\Omega$, le singleton $\{\omega\}$ est appelé *évènement élémentaire*.
- L'évènement $A \cup B$ se lit "$A$ ou $B$", l'évènement $A \cap B$ se lit "$A$ et $B$".
- $\emptyset$ est l'*évènement impossible*, et $\Omega$ est l'*évènement certain*.
- Pour $A$ et $B$ de $\mathcal{P}(\Omega)$, si $A \cap B = \emptyset$, ils sont dits *évènements incompatibles*.
- Pour $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, son complémentaire dans $\Omega$ est noté $\overline{A}$ et est l'*évènement contraire* de $A$.

### 1.2 Probabilité

**Définition.** *On appelle* tribu *(ou $\sigma-$*algèbre*) sur $\Omega$ un sous-ensemble $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ satisfaisant*

1. *$\Omega$ et $\emptyset$ appartiennent à $\mathcal{T}$,*
2. *si $A \in \mathcal{T}$, alors son complémentaire $\overline{A}$ appartient à $\mathcal{T}$,*
3. *si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une collection dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.*

**Définition.** *Un espace probabilisable est un couple $(\Omega, \mathcal{T})$ où $\mathcal{T}$ est une tribu sur $\Omega$.*

**Remarque.** *Dans le cas où $\Omega$ est fini ou dénombrable*, la tribu naturelle sur $\Omega$ est $\mathcal{P}(\Omega)$. Dans le cas général $\mathcal{P}(\Omega)$ et $\{\emptyset, \Omega\}$ sont des tribus sur $\Omega$. La tribu Borélienne sur $\mathbb{R}$ n'est pas au programme.

**1.1. Propriété - Stabilité par intersection.**

Si $\mathcal{T}$ est une tribu sur $\Omega$ et si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une collection dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}$, alors $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.

**Définition.** *Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. Une* probabilité *$P$ sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est une application $P : \mathcal{T} \to [0, 1]$ satisfaisant*

1. *normalisation: $P(\Omega) = 1$,*
2. *$\sigma$-additivité: si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'évènements de $\mathcal{T}$ disjoints deux à deux alors $\displaystyle P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n)$.*

**Définition.** *Un* espace probabilisé *est un triplet $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ où $P$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$.*

**Remarque.** *Dans le cas où $\Omega$ est fini*, il est courant de munir $\Omega$ de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. Une probabilité $P$ sur $\mathcal{P}(\Omega)$ est alors une application $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ qui vérifie:

1. normalisation: $P(\Omega) = 1$,
2. additivité: si $A$ et $B$ sont deux évènements incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

De plus dans ce cas, si $\Omega$ est de cardinal $n$ et $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, alors une probabilité $P$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est totalement définie par la donnée des nombres $P(\{\omega_i\})$ puisqu'alors l'additivité permet d'écrire

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \qquad P(A) = \sum_{\omega\in A} P(\{\omega\}).$$

**Exemple.** Soit $\Omega$ un ensemble fini de cardinal $n$ avec $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. On dit qu'il y a équiprobabilité sur $\Omega$ lorsqu'on considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ tel que

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \ldots = P(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}.$$

Dans ce cas pour tout évènement $A$ on a $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$.

**Remarque.** *Dans le cas où $\Omega$ est dénombrable*, il est courant de munir $\Omega$ de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. De plus si $\Omega = \{\omega_n : n \in \mathbb{N}\}$ (où les $\omega_n$ sont supposés deux à deux distincts), alors une probabilité $P$ est totalement définie par la donnée des nombres $P(\{\omega_n\})$ puisqu'alors l'additivité permet d'écrire

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \qquad P(A) = \sum_{\omega\in A} P(\{\omega\}).$$

La somme ci-dessus est bien définie car il s'agit d'une somme de nombres positifs sur un ensemble au plus dénombrable, et que cette somme est majorée par 1 (pour le cas $A = \Omega$).

**Remarque.** *Dans le cas où $\Omega$ est fini ou dénombrable*, l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est souvent simplement noté $(\Omega, P)$.

### 1.2. Propriété - Généralités.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé, alors:
- $P(\emptyset) = 0$,
- pour tout évènement $A \in \mathcal{T}$ on a $P(A) + P(\overline{A}) = 1$,
- si $A, B \in \mathcal{T}$ sont incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$,
- formule du crible: si $A, B \in \mathcal{T}$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
- formule du crible (générale) ou formule de Poincaré: soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements de $\mathcal{T}$ alors

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{\{i_1, \ldots, i_k\} \subset [1, n] \\ \mathrm{Card}(\{i_1, \ldots, i_k\}) = k}} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

- inégalité de Boole: si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'évènements de $\mathcal{T}$ alors $P\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) \leq \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n)$.
- si $A$ et $B$ sont deux évènements tels que $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$,
- si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'évènements de $\mathcal{T}$ alors $P\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$.

**Définition.** *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. Si $A \in \mathcal{T}$ est tel que $A \neq \Omega$ et $P(A) = 1$ (respectivement $A \neq \emptyset$ et $P(A) = 0$), on dit que $A$ est un* évènement presque sûr *ou* presque certain *(respectivement $A$ est un* évènement presque impossible *ou* négligeable*).*

## 1.3 Indépendance - Probabilité conditionnelle

Dans toute cette section, $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est un espace probabilisé.

**Définition.** *Deux évènements $A$ et $B$ de $\mathcal{T}$ sont* indépendants *si $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$.*

**Remarque.** Si deux évènements $A$ et $B$ de $\mathcal{T}$ ne sont pas indépendants, on dit que "$A$ et $B$ ne sont pas indépendants" (le terme "dépendant" ne s'emploie pas dans ce cas là).

**Définition.** *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille au plus dénombrable d'évènements de $\mathcal{T}$. Les évènements $A_i$ sont* indépendants deux à deux *si pour tout $(i, j) \in I^2$ les évènements $A_i$ et $A_j$ sont indépendants. Les évènements $A_i$ sont* mutuellement indépendants *si $P(\bigcap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} P(A_j)$ pour tout $J \subset I$.*

**Remarque.** Des évènements mutuellement indépendants sont indépendants deux à deux. Par contre des évènements peuvent être indépendants deux à deux sans être nécessairement mutuellement indépendants.

**Définition.** *Soient $A$ et $B$ deux évènements de $\mathcal{T}$. On suppose que $P(A) \neq 0$. La* probabilité de $B$ sachant $A$ *(ou* probabilité conditionnelle de $B$ sachant $A$*) est le nombre noté $P(B|A)$ donné par $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.*

**1.3. Propriété - Probabilité conditionnelle.**

Soit $A$ un évènement de $\mathcal{T}$ tel que $P(A) \neq 0$. Alors l'application $P_A$ définie sur $\mathcal{T}$ par $P_A : B \mapsto P(B|A)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

**1.4. Proposition - Caractérisation de l'indépendance.**

Si $A$ et $B$ sont deux évènement de $\mathcal{T}$ de probabilité non nulle, alors

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \iff P(B|A) = P(B) \iff P(A|B) = P(A).$$

**1.5. Proposition - Formule des probabilités totales.**

Soit $(A_1, ..., A_m)$ une partition finie de $\Omega$ telle que $A_i$ est un évènement de $\mathcal{T}$ et $P(A_i) \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$. Alors pour tout évènement $B$ de $\mathcal{T}$ on a

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\, P(A_i).$$

**1.6. Proposition - Formule de Bayes.**

Soit $(A_1, ..., A_m)$ une partition finie de $\Omega$ telle que $A_i$ est un évènement de $\mathcal{T}$ et $P(A_i) \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$. Alors pour tout évènement $B$ de $\mathcal{T}$ tel que $P(B) \neq 0$ on a

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\}, \qquad P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)\, P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\, P(A_i)}.$$

*Preuve de la Proposition 1.6.* Soit $j \in \{1, \ldots, m\}$, puisque $P(B) \neq 0$ et $P(A_j) \neq 0$ on peut écrire $P(A_j \cap B) = P(B|A_j)\, P(A_j)$ et $P(A_j \cap B) = P(A_j|B)\, P(B)$, d'où $P(A_j|B)\, P(B) = P(B|A_j)\, P(A_j)$. On conclut en appliquant la Proposition 1.5. $\square$

# 2 Variables aléatoires

Dans toute cette partie, $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est un espace probabilisé.

## 2.1 Généralités

**Définition.** *Une application* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *est une* variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{T})$ *si* $X^{-1}(\,]-\infty, a]) \in \mathcal{T}$ *pour tout* $a \in \mathbb{R}$.

**2.1. Propriété - Caractérisation des variables aléatoires.**

Une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{T})$ si et seulement si $X^{-1}(I) \in \mathcal{T}$ pour tout intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.

**Définition.** *Soit $d \geq 1$. Une application $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ donnée par*

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad X(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_d(\omega))$$

*est une* variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ sur $(\Omega, \mathcal{T})$ *si $X_i$ est une variable aléatoire réelle pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$.*

**Remarque.** Dans le cas où $\Omega$ est fini ou dénombrable et $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle, et toute application $Y : \Omega \to \mathbb{R}^d$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

**2.2. Propriété - Algèbre des variables aléatoires [admis].**

La somme et le produit de deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{T})$ sont des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
La somme de deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

**Notation.** *Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{T})$. Si $E \subset \mathbb{R}$, on note généralement $(X = E)$ ou $X = E$ l'ensemble $X^{-1}(E)$. De plus, si $a < b \in \mathbb{R}$, alors on note:*

- *$(X = a)$ l'évènement $X^{-1}(\{a\})$,*
- *$(X < a)$ l'évènement $X^{-1}(\,]-\infty, a[\,)$,*
- *$(X \leq a)$ l'évènement $X^{-1}(\,]-\infty, a]\,)$,*
- *$(a \leq X \leq b)$ l'évènement $X^{-1}(\,[a, b]\,)$...*

## 2.2 Variables aléatoires réelles discrètes

**Définition.** *Une variable aléatoire réelle $X$ sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est* discrète *si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.*

**Remarque.** Si $X$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{T})$ et $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$, alors $g \circ X$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

**Définition.** *Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{T})$, la* loi de probabilité de $X$ *est l'application $E \mapsto P(X \in E)$, définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $[0, 1]$.*

**2.3. Propriété - Caractérisation de la loi de probabilité.**

Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{T})$, alors la loi de probabilité de $X$ est une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$.
De plus, la loi de probabilité de $X$ est complètement déterminée par la donnée de $P(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

**Définition.** *Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{T})$, la* fonction de répartition de $X$ *est l'application $F_X : x \mapsto P(X \leq x)$, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[0, 1]$.*

**2.4. Propriété - Régularité de la fonction de répartition.**

Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{T})$, alors la fonction de répartition de $X$ est une fonction continue à droite et admettant une limite à gauche en tout point de $\mathbb{R}$ (on dit que c'est une fonction *cadlag*).

**Définition.** *Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{T})$,* l'espérance de $X$ *(ou la* moyenne de $X$*) est le nombre réel noté $\mathbb{E}(X)$ donné par* $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\, P(X = x)$.

**2.5. Propriété.**
L'espérance est une forme linéaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète bornée sur $(\Omega, \mathcal{T})$, alors

$$\inf\{X(\omega) \,:\, \omega \in \Omega\} \leq \mathbb{E}(X) \leq \sup\{X(\omega) \,:\, \omega \in \Omega\}.$$

Si $\Omega$ est fini ou dénombrable, alors toute variable aléatoire réelle $X$ sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est discrète et on a $\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\, P(\{\omega\})$.

**Exemple.** Soit $X$ une variable aléatoire réelle constante sur $(\Omega, \mathcal{T})$, c'est-à-dire $X(\Omega) = \{x\}$ pour un certain réel $x$, alors $\mathbb{E}(X) = x$.

**Définition.** *Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{T})$, la* variance de $X$ *est le nombre réel noté $V(X)$ donné par $V(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]$.* L'écart-type de $X$ *est le nombre noté $\sigma(X)$ et donné par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.*

**2.6. Propriété.**
Si $X$ est une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{T})$ et $a, b \in \mathbb{R}$ alors

$$V(aX + b) = a^2\, V(X).$$

Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{T})$, alors on peut appliquer la formule de Koenig:

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Enfin, si $X$ est une variable aléatoire réelle discrète bornée sur $(\Omega, \mathcal{T})$, alors

$$\sigma(X) \leq \sup(|X(\omega) - \mathbb{E}(X)| \,:\, \omega \in \Omega\}.$$

**Définition.** *Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{T})$ et $k \in \mathbb{N}^*$, alors le* moment d'ordre $k$ de $X$ *est le nombre $m_k(X) = \mathbb{E}(X^k)$ et le* moment centré d'ordre $k$ de $X$ *est le nombre $\mu_k(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^k)$.*

## 2.3 Variables aléatoires réelles discrètes - Lois au programme

**Exemple** (Loi uniforme)**.** La loi uniforme modélise une expérience aléatoire ayant un nombre fini d'issues qui sont équiprobables.
Une variable $X$ aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{T})$ suit la loi uniforme si $X(\Omega)$ est un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$ et $P(X = x) = \frac{1}{n}$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

**Exemple** (Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$)**.** Soit $p \in [0, 1]$. La loi de Bernoulli de paramètre $p$ modélise une expérience ayant deux issues possibles: le succès (avec une probabilité $p$) et l'échec (avec

une probabilité $1-p$).
Une variable $X$ aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{T})$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p$ (ou suit $\mathcal{B}(p)$) si $X(\Omega) = \{0,1\}$ et $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$. Dans ce cas, $\mathbb{E}(X) = p$ et $V(X) = p\,(1-p)$.

**Exemple** (Loi de binomiale $\mathcal{B}(n,p)$)**.** Soit $n \geq 1$ et $p \in [0,1]$. La loi de binomiale de paramètres $n$ et $p$ modélise la répétion successive de $n$ expériences suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p$, dont on compte le nombre de succès.
Une variable $X$ aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{T})$ suit la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$ (ou suit $\mathcal{B}(n,p)$) si $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$ et

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \qquad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k}.$$

Dans ce cas, $\mathbb{E}(X) = n\,p$ et $V(X) = n\,p\,(1-p)$.

**Exemple** (Loi hypergéométrique $H(N,p,n)$)**.** Soit $M \geq n \geq 1$ et $p \in [0,1]$. La loi hypergéométrique de paramètres $N$, $n$ et $p$ modélise l'expérience qui consiste à choisir un échantillon de $n$ individus dans une population d'effectif total $N$, population dans laquelle chaque individu a la probabilité $p$ d'avoir un certain caractère $C$: on compte alors le nombre d'éléments de l'échantillon choisi ayant ce caractère $C$.
Une variable $X$ aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{T})$ suit la loi hypergéométrique $H(N,p,n)$ de paramètres $N$, $n$ et $p$ (ou suit $H(N,p,n)$) si $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$ et

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \qquad P(X=k) = \frac{\binom{N\,p}{k}\binom{N\,(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Dans ce cas, $\mathbb{E}(X) = n\,p$ et $V(X) = n\,p\,(1-p)\frac{N-n}{N-1}$.

**Exemple** (Loi géométrique)**.** Soit $p \in [0,1]$. La loi géométrique de paramètre $p$ modélise la répétition successive et indépendante d'expériences suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p$, et ce jusqu'à l'obtention d'un succès: on s'intéresse alors au nombre d'expériences qu'il a fallu effectuer pour obtenir le premier succès.
Une variable $X$ aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{T})$ suit la loi géométrique de paramètre $p$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $P(X=k) = (1-p)^{k-1}\,p$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas, $\mathbb{E}(X) = \frac{1-p}{p}$ et $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

**Exemple** (Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$)**.** Soit $\lambda > 0$. Une variable $X$ aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{T})$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda$ (ou suit $\mathcal{P}(\lambda)$) si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, $\mathbb{E}(X) = V(X) = \lambda$.

**2.7. Propriété - Rappels de combinatoire.**

On considère un ensemble $E$ de cardinal $n \geq 1$, et $0 \leq k \leq n$, alors:

- le nombre de permutations de $E$ est $n!$,
- le nombre d'arrangements de $k$ éléments de $E$ est

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!},$$

- le nombre de combinaisons de $k$ éléments de $E$ est

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

**Remarque.** Un arrangement est une liste ordonnée, alors qu'une combinaison est une liste non ordonnée. De nombreuses relations faisant intervenir les coefficients binômiaux se déduisent de la formule du binôme:

$$\forall x, y \in \mathbb{C}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) x^k y^{n-k}.$$