OPTIMUM ET ÉQUILIBRE POUR UN PROBLÈME DE TRANSPORT OPTIMAL AVEC FILE D'ATTENTE

GIANLUCA CRIPPA, CHLOÉ JIMENEZ, AND ALDO PRATELLI

On considère k bureaux de postes dont les positions sont k points $x_1, ..., x_k$ d'un compact Ω de $\mathbb{R}^d$ représentant une ville. Soit fdx la densité de population dans cette ville. On cherche une partition $(A_i)_i$ de Ω telle que chaque habitant demeurant en $x \in A_i$ se rend en x_i. Le temps perdu par une personne qui fait ce choix est la somme des durées du trajet et de la file d'attente. La durèe du trajet est représentée par $|x - x_i|^p$, i.e. la distance parcourue élevée à une puissance $p \geq 1$. Le temps d'attente dépend du nombre de personnes $\int_{A_i} f(x)\, dx$ qui se rendent en x_i et change selon le bureau de poste considéré (en fonction par exemple du nombre d'employés du bureau). Ainsi le coût total pour en $x \in A_i$ est $|x - x_i|^p + h_i \left(\int_{A_i} f(x)\, dx \right)$ où h_i est croissante. Le problème d'optimisation considéré est le suivant:

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^{k} \int_{A_i} |x - x_i|^p + h_i \left(\int_{A_i} f(x)\, dx \right) \, f(x)\, dx \right\}$$

où l'infimum est pris sur toute les partitions $(A_i)_i$ de Ω.

Dans un premier temps, nous avons montré que, sous certaines hypothèses, la partition optimale existe et est unique. Nous en avons donné une charactérisation.

Nous avons ensuite considéré le problème sous l'angle de la théorie des jeux. Chaque citadin se rendant en x_i est satisfait si ce choix minimise son propre coût en l'absence de changement de comportement des autres citadins, i.e. lorsque:

$$|x - x_i|^p + h_i \left(\int_{A_i} f(x)\, dx \right) = \min_j \left\{ |x - x_j|^p + h_j \left(\int_{A_j} f(x)\, dx \right) \right\}.$$

Une situation dans laquelle tous les habitants sont satisfaits s'appelle un équilibre. Dans le problème que nous considérons, sous certaines hypothèses, nous avons l'existence et l'unicité d'un tel équilibre. De plus l'équilibre est également un optimum de Pareto. Nous étudions ensuite la dynamique du problème lorsque chaque citoyen prend sa décision en fonction de la connaissance des durées d'attente $h_i \left(\int_{A_i} f(x)\, dx \right)$ de la veille. Nous donnons les conditions de convergence vers l'équilibre lorsque les habitants suivent certaines stratégies.

Laboratoire de Mathématiques de Brest, 6, avenue Victor Le Gorgeu, CS 93837, F-29238 Brest Cedex 3, France

E-mail address: `chloe.jimenez@univ-brest.fr`