

Sixièmes Journées Franco-Chiliennes d'Optimisation

Sur la régularisation par mollification

Pierre Maréchal

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE TOULOUSE

Plan

- Opérateurs de Fourier tronqués et mollification
- Analyse asymptotique (avec N. Alibaud et Y. Saesor)
- Extension (avec X. Bonnefond et A. Rondepierre)
- Echantillonnage et dualité (avec D. Wallach)

Plan

Synthèse de Fourier

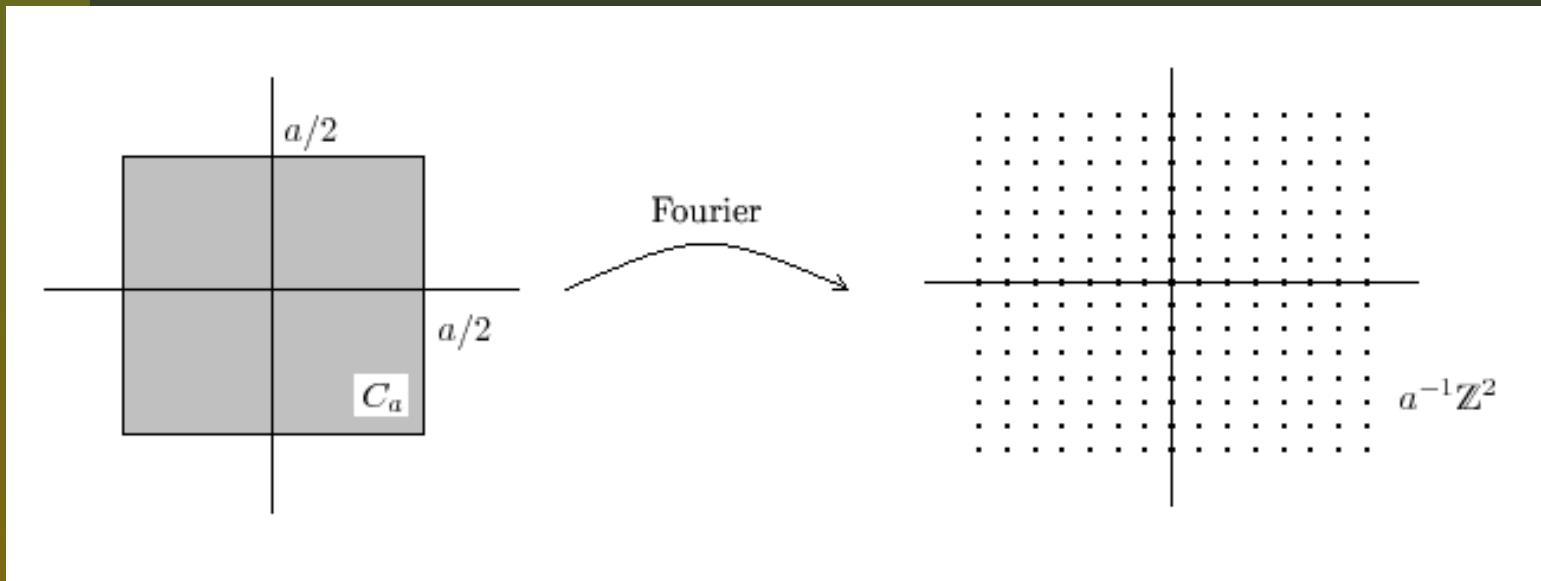
Retrouver une fonction à partir d'une connaissance partielle et approchée de sa transformée de Fourier.

Exemple 1: séries de Fourier

$f \in L^2(C_a)$ où $C_a := [-a/2, a/2]^d$

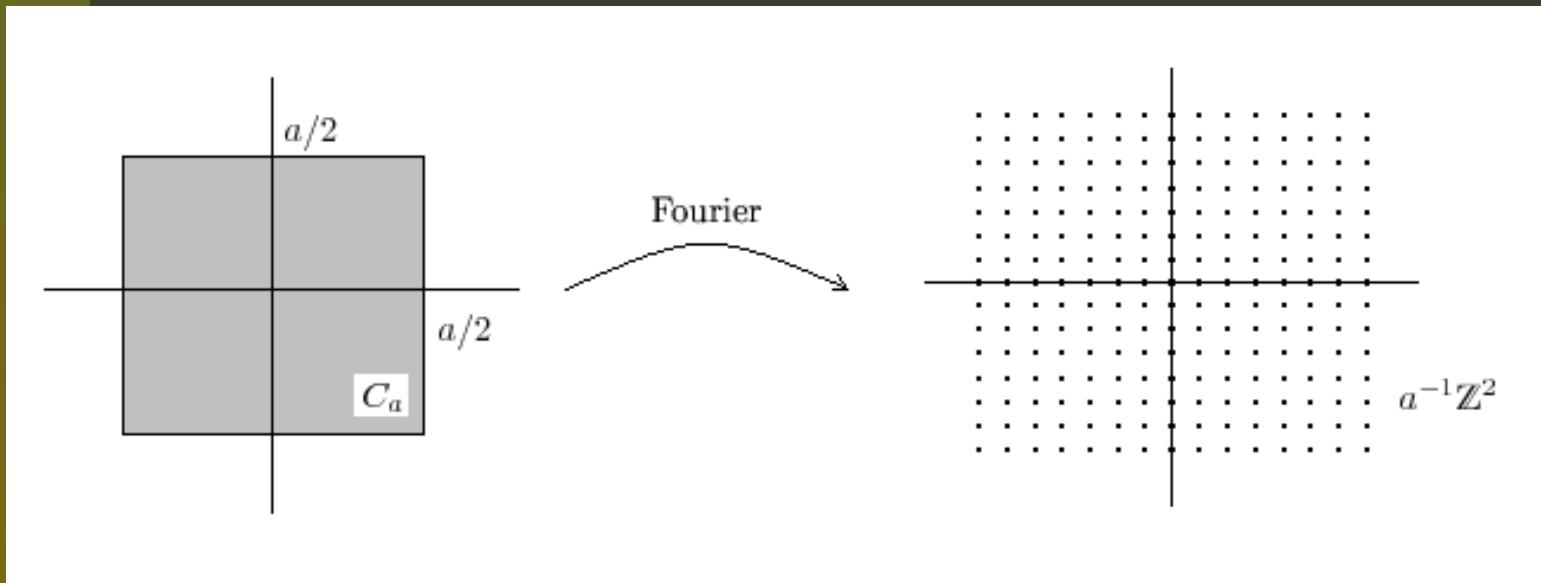
Exemple 1: séries de Fourier

$f \in L^2(C_a)$ où $C_a := [-a/2, a/2]^d$



Exemple 1: séries de Fourier

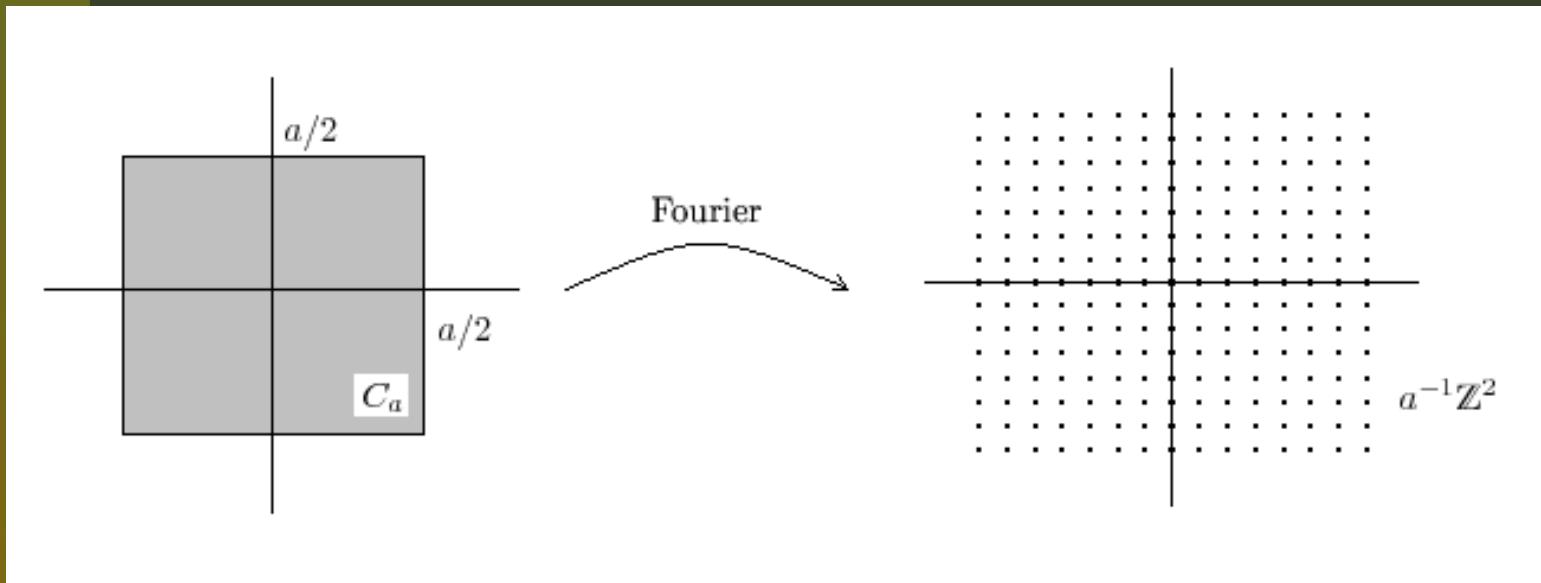
$f \in L^2(C_a)$ où $C_a := [-a/2, a/2]^d$



$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{a^n} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}\left(\frac{\mathbf{k}}{a}\right) \exp\left[2i\pi \left\langle \frac{\mathbf{k}}{a}, \mathbf{x} \right\rangle\right] \mathbf{1}_{C_a}(\mathbf{x})$$

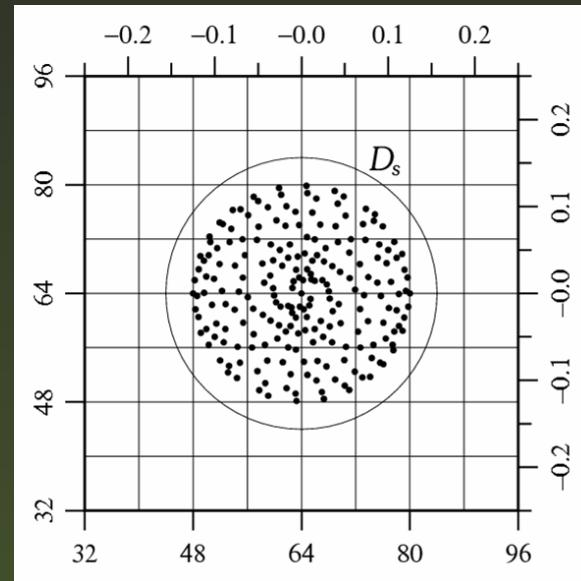
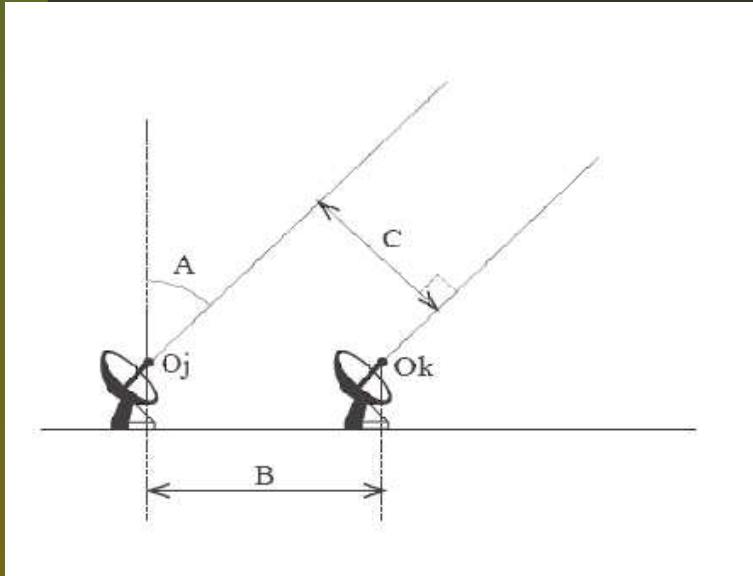
Exemple 1: séries de Fourier

$f \in L^2(C_a)$ où $C_a := [-a/2, a/2]^d$

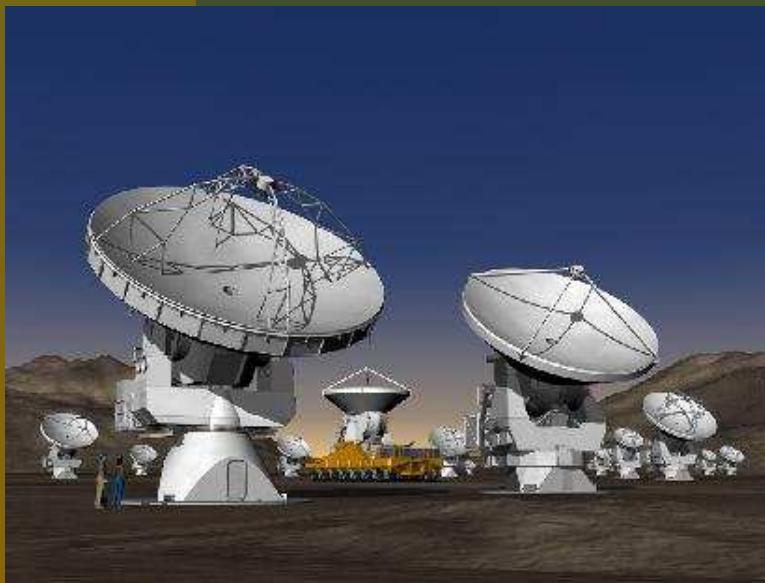
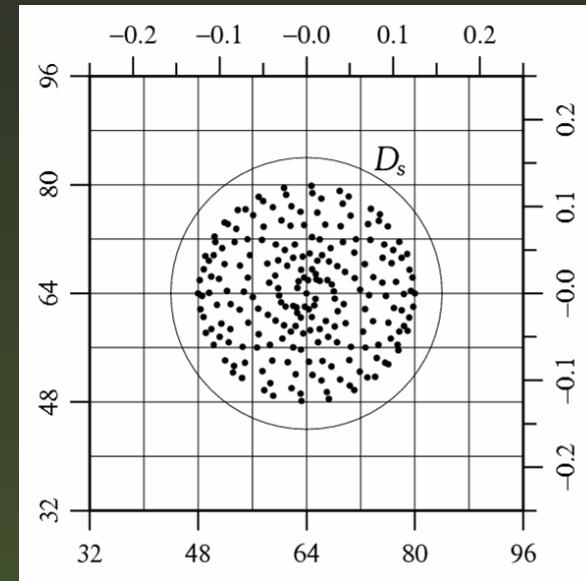
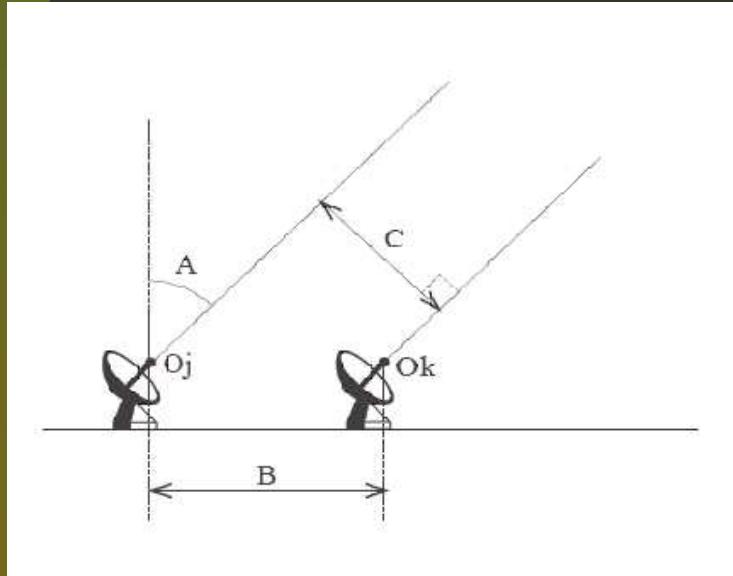


$$\hat{f}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}\left(\frac{\mathbf{k}}{a}\right) \operatorname{sinc} \pi a \left(\boldsymbol{\xi} - \frac{\mathbf{k}}{a}\right)$$

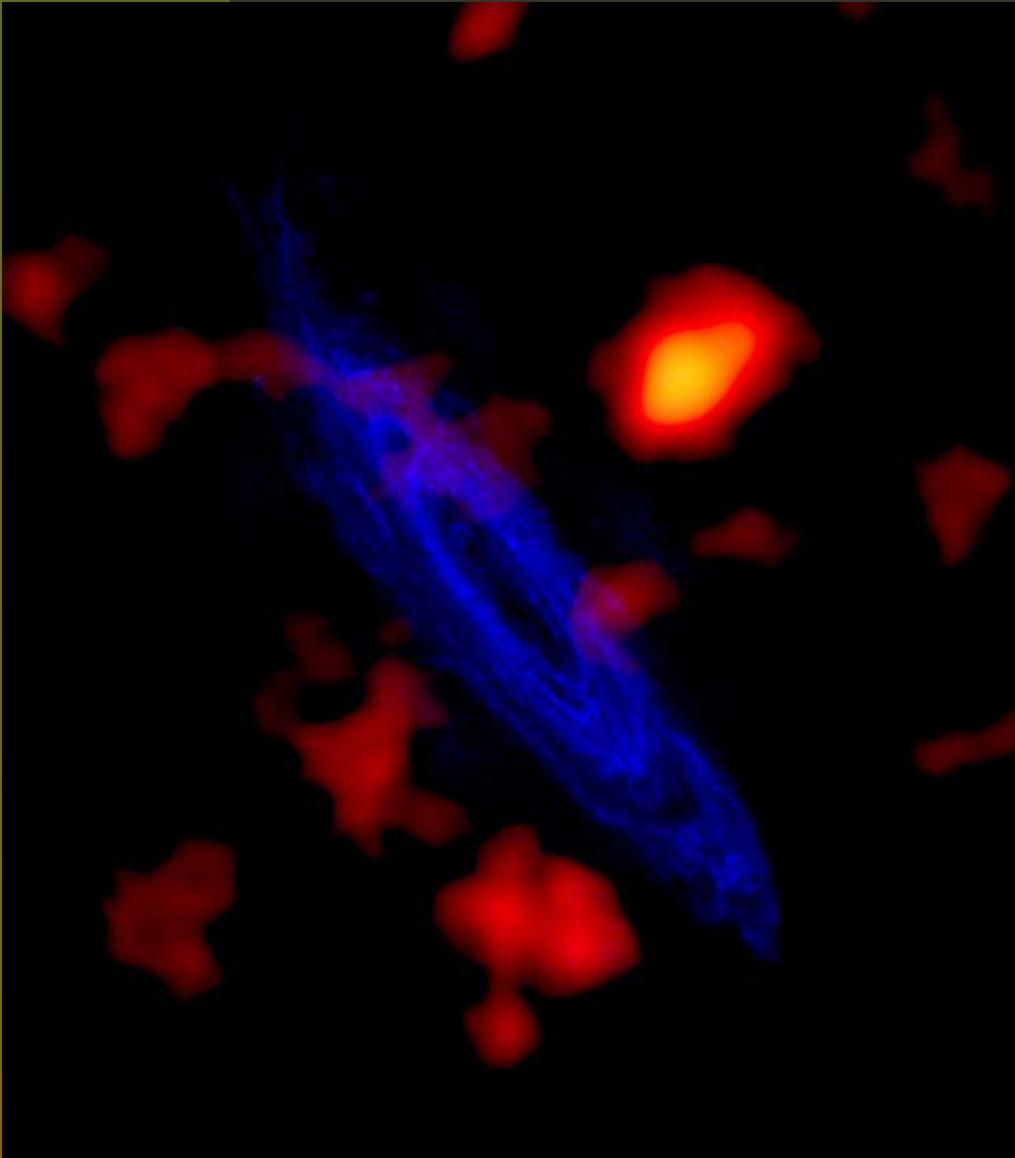
Exemple 2: synthèse d'ouverture



Exemple 2: synthèse d'ouverture



Galaxie d'Andromède

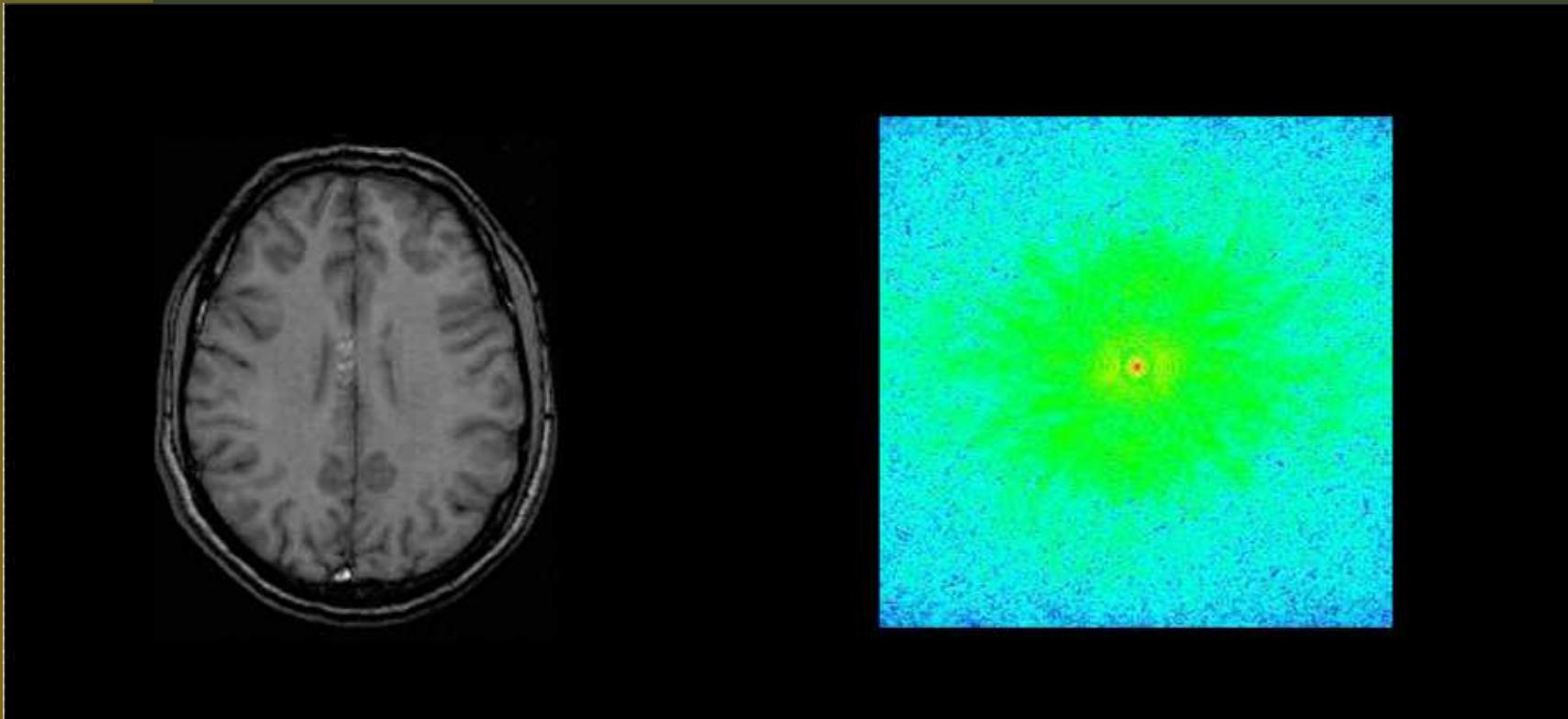


WSRT

Image du *National Radio Astronomy Observatory / Associated Universities, Inc. / National Science Foundation*

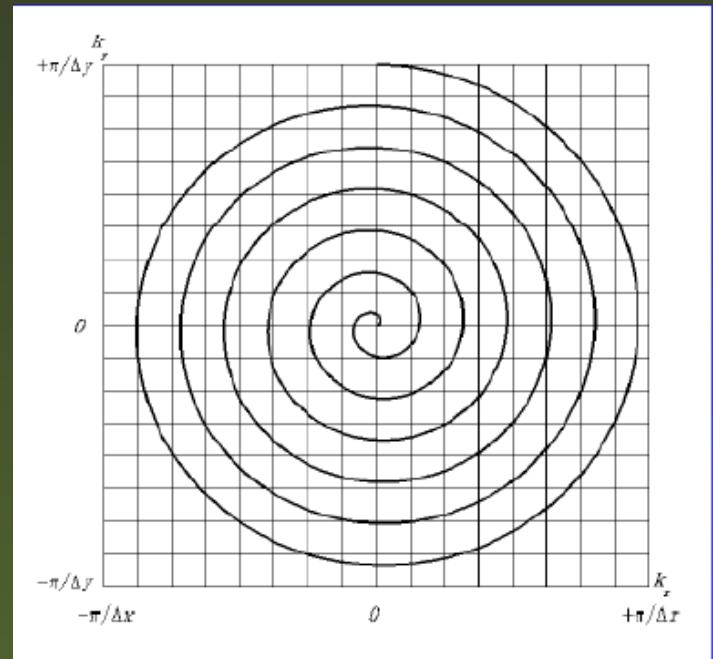
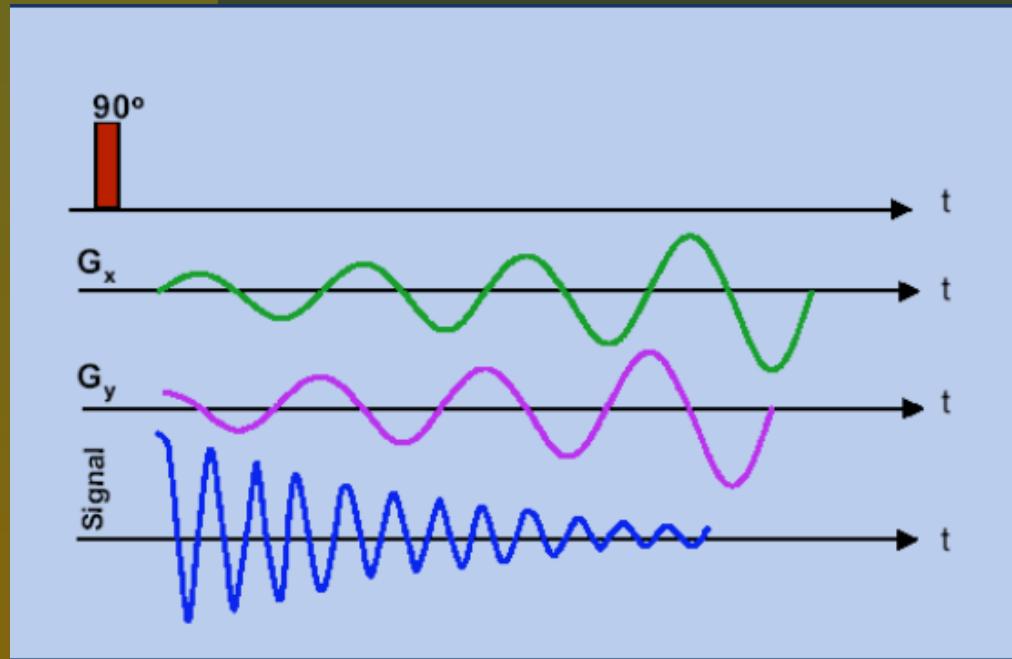
Exemple 3: IRM

Acquisitions standard:



Exemple 3: IRM

Acquisitions non-cartésiennes et lacunaires :



Extrapolation de Fourier

Extrapolation de Fourier

Soient V et W deux sous-ensembles de \mathbb{R}^p . On suppose que V est borné et que W est d'intérieur non vide.

Retrouver $f_0 \in L^2(V)$ à partir de la connaissance de sa transformée de Fourier sur W .

Extrapolation de Fourier

Soient V et W deux sous-ensembles de \mathbb{R}^p . On suppose que V est borné et que W est d'intérieur non vide.

Retrouver $f_0 \in L^2(V)$ à partir de la connaissance de sa transformée de Fourier sur W .

A. LANNES, S. ROQUES and M.-J. CASANOVE,
*Stabilized reconstruction in signal and image processing;
Part I: partial deconvolution and spectral extrapolation
with limited field*, J. Mod. Opt. **34**, pp. 161-226, 1987.

Extrapolation de Fourier

Soient V et W deux sous-ensembles de \mathbb{R}^p . On suppose que V est borné et que W est d'intérieur non vide.

Retrouver $f_0 \in L^2(V)$ à partir de la connaissance de sa transformée de Fourier sur W .

A. LANNES, S. ROQUES and M.-J. CASANOVE,
Stabilized reconstruction in signal and image processing;
Part I: partial deconvolution and spectral extrapolation
with limited field, J. Mod. Opt. **34**, pp. 161-226, 1987.

Opérateur de Fourier Tronqué:

$$\begin{aligned} T_W: \quad L^2(V) &\longrightarrow L^2(W) \\ f &\longmapsto T_W f := \mathbf{1}_W \hat{f} = \mathbf{1}_W U f. \end{aligned}$$

Propriétés de T_W

Propriétés de T_W

$$(T_W f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{e^{-2i\pi\langle x, \xi \rangle} \mathbb{1}_V(x) \mathbb{1}_W(\xi)}_{\alpha(x, \xi) \in L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} f(x) dx.$$

Propriétés de T_W

$$(T_W f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{e^{-2i\pi\langle x, \xi \rangle} \mathbb{1}_V(x) \mathbb{1}_W(\xi)}_{\alpha(x, \xi) \in L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} f(x) dx.$$

↪ T_W est de **Hilbert-Schmidt**

Propriétés de T_W

$$(T_W f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{e^{-2i\pi\langle x, \xi \rangle} \mathbf{1}_V(x) \mathbf{1}_W(\xi)}_{\alpha(x, \xi) \in L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} f(x) dx.$$

↪ T_W est de **Hilbert-Schmidt**

Proposition La transformée de Fourier d'une fonction à support compact est entière analytique.

Propriétés de T_W

$$(T_W f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{e^{-2i\pi\langle x, \xi \rangle} \mathbf{1}_V(x) \mathbf{1}_W(\xi)}_{\alpha(x, \xi) \in L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} f(x) dx.$$

↪ T_W est de **Hilbert-Schmidt**

Proposition La transformée de Fourier d'une fonction à support compact est entière analytique.

↪ T_W est **injective**

Donc, $T_W^* T_W$ est **compact**, **injectif**, hermitien, positif.

Donc, $T_W^* T_W$ est **compact**, **injectif**, hermitien, positif.

↪ $T_W^{-1} : \text{ran } T_W \rightarrow L^2(V)$ est non borné

Donc, $T_W^* T_W$ est **compact**, **injectif**, hermitien, positif.

$\hookrightarrow \quad T_W^{-1} : \text{ran } T_W \rightarrow L^2(V)$ est non borné

$\hookrightarrow \quad \text{ran } T_W$ n'est pas fermé

Donc, $T_W^* T_W$ est **compact**, **injectif**, hermitien, positif.

- ↪ T_W^{-1} : $\text{ran } T_W \rightarrow L^2(V)$ est non borné
- ↪ $\text{ran } T_W$ n'est pas fermé
- ↪ T_W^+ est non borné et $\mathcal{D}(T_W^+) \subsetneq L^2(W)$

Donc, $T_W^* T_W$ est **compact**, **injectif**, hermitien, positif.

↪ T_W^{-1} : $\text{ran } T_W \rightarrow L^2(V)$ est non borné

↪ $\text{ran } T_W$ n'est pas fermé

↪ T_W^+ est non borné et $\mathcal{D}(T_W^+) \subsetneq L^2(W)$

$\mathcal{D}(T_W^+)$ est un sous-espace dense de $L^2(W)$

Donc, $T_W^* T_W$ est **compact**, **injectif**, hermitien, positif.

$\hookrightarrow T_W^{-1} : \text{ran } T_W \rightarrow L^2(V)$ est non borné

$\hookrightarrow \text{ran } T_W$ n'est pas fermé

$\hookrightarrow T_W^+$ est non borné et $\mathcal{D}(T_W^+) \subsetneq L^2(W)$

$\mathcal{D}(T_W^+)$ est un sous-espace dense de $L^2(W)$

Conclusion Le problème d'extrapolation de Fourier est mal posé.

Cadre général

Equation mal-posée : $Tf_0 = g$ avec : $T: F \rightarrow G$

Cadre général

Equation mal-posée : $Tf_0 = g$ avec : $T: F \rightarrow G$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad \frac{1}{2} \|g - Tf\|^2 + \alpha \mathcal{H}(f) \\ \text{s.c.} \quad f \in F \end{array} \right.$$

Cadre général

Equation mal-posée : $Tf_0 = g$ avec : $T: F \rightarrow G$

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiser} & \frac{1}{2} \|g - Tf\|^2 + \alpha \mathcal{H}(f) \\ \text{s.c.} & f \in F \end{array}$$

Principaux enjeux

Bien-position

Comportement asymptotique ($\alpha \downarrow 0$)

Approche alternative

Equation mal-posée : $Tf_0 = g$ avec : $T: F \rightarrow G$

Approche alternative

Equation mal-posée : $Tf_0 = g$ avec : $T: F \rightarrow G$

$$f_0 = C_\beta f_0 + (I - C_\beta) f_0$$

où C_β approche I lorsque $\beta \downarrow 0$

Approche alternative

Equation mal-posée : $Tf_0 = g$ avec : $T: F \rightarrow G$

$$f_0 = C_\beta f_0 + (I - C_\beta) f_0$$

où C_β approche I lorsque $\beta \downarrow 0$

Supposons qu'il existe un opérateur $\Phi_\beta: G \rightarrow G$ tel que

$$TC_\beta = \Phi_\beta T$$

Approche alternative

Equation mal-posée : $Tf_0 = g$ avec : $T: F \rightarrow G$

$$f_0 = C_\beta f_0 + (I - C_\beta) f_0$$

où C_β approche I lorsque $\beta \downarrow 0$

Supposons qu'il existe un opérateur $\Phi_\beta: G \rightarrow G$ tel que

$$TC_\beta = \Phi_\beta T$$

$$Tf_0 \approx g \hookrightarrow TC_\beta f_0 = \Phi_\beta T f_0 \approx \Phi_\beta g$$

Approche alternative

Equation mal-posée : $Tf_0 = g$ avec : $T: F \rightarrow G$

$$f_0 = C_\beta f_0 + (I - C_\beta) f_0$$

où C_β approche I lorsque $\beta \downarrow 0$

Supposons qu'il existe un opérateur $\Phi_\beta: G \rightarrow G$ tel que

$$TC_\beta = \Phi_\beta T$$

$$Tf_0 \approx g \hookrightarrow T\cancel{C_\beta}f_0 = \Phi_\beta Tf_0 \approx \Phi_\beta g$$

Minimiser $\frac{1}{2} \|\Phi_\beta g - Tf\|_G^2 + \frac{\alpha}{2} \|(I - C_\beta)f\|_F^2$

Principaux enjeux

$$\text{Minimiser} \quad \frac{1}{2} \left\| \Phi_{\beta} g - Tf \right\|_G^2 + \frac{\alpha}{2} \left\| (I - C_{\beta})f \right\|_F^2$$

Principaux enjeux

$$\text{Minimiser} \quad \frac{1}{2} \left\| \Phi_{\beta} g - Tf \right\|_G^2 + \frac{\alpha}{2} \left\| (I - C_{\beta})f \right\|_F^2$$

Bien position

Principaux enjeux

$$\text{Minimiser} \quad \frac{1}{2} \left\| \Phi_{\beta} g - Tf \right\|_G^2 + \frac{\alpha}{2} \left\| (I - C_{\beta}) f \right\|_F^2$$

Bien position

Comportement asymptotique ($\alpha \downarrow 0$ et/ou $\beta \downarrow 0$)

Exemples

$$TC_\beta = \Phi_\beta T \quad \text{avec} \quad C_\beta := U^{-1} \hat{\phi}_\beta U$$

Exemples

$$TC_\beta = \Phi_\beta T \quad \text{avec} \quad C_\beta := U^{-1} \hat{\phi}_\beta U$$

$$T = T_W$$

$$\hookrightarrow \quad TC_\beta = \mathbb{1}_W U U^{-1} \hat{\phi}_\beta U = \hat{\phi}_\beta \mathbb{1}_W U = \hat{\phi}_\beta T$$

$$\Phi_\beta = (g \mapsto \hat{\phi}_\beta g)$$

Exemples

$$TC_\beta = \Phi_\beta T \quad \text{avec} \quad C_\beta := U^{-1} \hat{\phi}_\beta U$$

$T = K = U^{-1}kU$, convolution par k

$$\hookrightarrow \quad TC_\beta = C_\beta T$$

$$\Phi_\beta = C_\beta$$

Exemples

$$TC_\beta = \Phi_\beta T \quad \text{avec} \quad C_\beta := U^{-1} \hat{\phi}_\beta U$$

$T = R$, opérateur de Radon

$$(Rf)(\theta, s) = \int f(\mathbf{x}) \delta(s - \langle \theta, \mathbf{x} \rangle) d\mathbf{x}$$

$$R(f_1 * f_2) = Rf_1 \circledast Rf_2$$

\circledast convolution selon s

$$\hookrightarrow \quad TC_\beta f = T(\phi_\beta * f) = T\phi_\beta \circledast Tf$$

$$\Phi_\beta = (g \mapsto T\phi_\beta \circledast g)$$

Régularisation de $T_W f_0 = g$

Régularisation de $T_W f_0 = g$

$$\left| \begin{array}{ll} \text{Minimiser} & \frac{1}{2} \left\| \hat{\phi}_\beta g - T_{\textcolor{blue}{W}} f \right\|_{L^2(W)}^2 + \frac{\alpha}{2} \left\| (1 - \hat{\phi}_\beta) \hat{f} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ \text{s.t.} & f \in L^2(V) \end{array} \right.$$

Régularisation de $T_W f_0 = g$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad \frac{1}{2} \left\| \hat{\phi}_\beta g - T_{\textcolor{blue}{W}} f \right\|_{L^2(W)}^2 + \frac{\alpha}{2} \left\| (1 - \hat{\phi}_\beta) \hat{f} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ \text{s.t.} \quad f \in L^2(V) \end{array} \right.$$

Données régularisées: $g_\beta := \Phi_\beta g = \hat{\phi}_\beta g$

Régularisation de $T_W f_0 = g$

$$\left| \begin{array}{ll} \text{Minimiser} & \frac{1}{2} \left\| \hat{\phi}_\beta g - T_{\textcolor{blue}{W}} f \right\|_{L^2(W)}^2 + \frac{\alpha}{2} \left\| (1 - \hat{\phi}_\beta) \hat{f} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ \text{s.t.} & f \in L^2(V) \end{array} \right.$$

Données régularisées: $g_\beta := \Phi_\beta g = \hat{\phi}_\beta g$

$$\phi_\beta(x) = \frac{1}{\beta^d} \phi\left(\frac{x}{\beta}\right) \quad \hat{\phi}_\beta(\xi) = \hat{\phi}(\beta\xi)$$

Bien-position

$$(\mathcal{P}_{\alpha,\beta}) \quad \left| \begin{array}{ll} \text{Minimiser} & \frac{1}{2} \left\| \hat{\phi}_\beta g - T_W f \right\|^2 + \frac{\alpha}{2} \left\| (1 - \hat{\phi}_\beta) \hat{f} \right\|^2 \\ \text{s.c.} & f \in L^2(V) \end{array} \right.$$

Bien-position

Définition $\langle f_1, f_2 \rangle_\beta := \int_{\mathbb{R}^d} |1 - \hat{\phi}_\beta|^2 U f_1 \overline{U f_2}$

$$(\mathcal{P}_{\alpha, \beta}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad \frac{1}{2} \left\| \hat{\phi}_\beta g - T_W f \right\|^2 + \frac{\alpha}{2} \left\| (1 - \hat{\phi}_\beta) \hat{f} \right\|^2 \\ \text{s.c.} \quad f \in L^2(V) \end{array} \right.$$

Bien-position

Définition $\langle f_1, f_2 \rangle_\beta := \int_{\mathbb{R}^d} |1 - \hat{\phi}_\beta|^2 U f_1 \overline{U f_2}$

Lemme $\langle \cdot, \cdot \rangle_\beta$ est un produit hermitien qui fait de $L^2(V)$ un espace de Hilbert. La norme correspondante $\| \cdot \|_\beta$ est équivalente à $\| \cdot \|_{L^2(V)}$.

$$(\mathcal{P}_{\alpha,\beta}) \quad \left| \begin{array}{ll} \text{Minimiser} & \frac{1}{2} \left\| \hat{\phi}_\beta g - T_W f \right\|^2 + \frac{\alpha}{2} \left\| (1 - \hat{\phi}_\beta) \hat{f} \right\|^2 \\ \text{s.c.} & f \in L^2(V) \end{array} \right.$$

Bien-position

Définition $\langle f_1, f_2 \rangle_\beta := \int_{\mathbb{R}^d} |1 - \hat{\phi}_\beta|^2 U f_1 \overline{U f_2}$

Lemme $\langle \cdot, \cdot \rangle_\beta$ est un produit hermitien qui fait de $L^2(V)$ un espace de Hilbert. La norme correspondante $\|\cdot\|_\beta$ est équivalente à $\|\cdot\|_{L^2(V)}$.

Proposition Soit $\alpha, \beta > 0$ fixé. Alors $(\mathcal{P}_{\alpha, \beta})$ admet une unique solution $f_{\alpha, \beta}$, qui dépend continûment de $g \in L^2(W)$.

$$(\mathcal{P}_{\alpha, \beta}) \quad \left| \begin{array}{ll} \text{Minimiser} & \frac{1}{2} \left\| \hat{\phi}_\beta g - T_W f \right\|^2 + \frac{\alpha}{2} \left\| (1 - \hat{\phi}_\beta) \hat{f} \right\|^2 \\ \text{s.c.} & f \in L^2(V) \end{array} \right.$$

Preuve

$(\mathcal{P}_{\alpha,\beta})$ peut s'écrire:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad \frac{1}{2} \left\| \hat{\phi}_\beta g - T_W f \right\|_{L^2(W)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|f\|_\beta^2 \\ \text{s.c.} \quad f \in L^2(V) \end{array} \right.$$

Preuve

$(\mathcal{P}_{\alpha,\beta})$ peut s'écrire:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad \frac{1}{2} \left\| \hat{\phi}_\beta g - T_W f \right\|_{L^2(W)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|f\|_\beta^2 \\ \text{s.c.} \quad f \in L^2(V) \end{array} \right.$$

$$f_{\alpha,\beta} = (T_W^\# T_W + \alpha I)^{-1} T_W^\# (\hat{\phi}_\beta g)$$

Preuve

$(\mathcal{P}_{\alpha,\beta})$ peut s'écrire:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad \frac{1}{2} \left\| \hat{\phi}_\beta g - T_W f \right\|_{L^2(W)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|f\|_\beta^2 \\ \text{s.c.} \quad f \in L^2(V) \end{array} \right.$$

$$f_{\alpha,\beta} = (T_W^\# T_W + \alpha I)^{-1} T_W^\# (\hat{\phi}_\beta g)$$

$T_W^\#$: adjoint de T_W par rapport à $\langle \cdot, \cdot \rangle_\beta$

Preuve

$(\mathcal{P}_{\alpha,\beta})$ peut s'écrire:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad \frac{1}{2} \left\| \hat{\phi}_\beta g - T_W f \right\|_{L^2(W)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|f\|_\beta^2 \\ \text{s.c.} \quad f \in L^2(V) \end{array} \right.$$

$$f_{\alpha,\beta} = (T_W^\# T_W + \alpha I)^{-1} T_W^\# (\hat{\phi}_\beta g)$$

$T_W^\#$: adjoint de T_W par rapport à $\langle \cdot, \cdot \rangle_\beta$

La conclusion découle de la théorie de Tikhonov et de la continuité de la multiplication $g \mapsto \hat{\phi}_\beta g$. ■

Approximation de T_W^+ : $\alpha \downarrow 0$

Approximation de T_W^+ : $\alpha \downarrow 0$

$$(\mathcal{P}_{0,\beta}) \quad \left| \begin{array}{ll} \text{Minimiser} & \frac{1}{2} \left\| \hat{\phi}_\beta g - T_W f \right\|^2 \\ \text{s.c.} & f \in L^2(V) \end{array} \right.$$

Approximation de T_W^+ : $\alpha \downarrow 0$

$$(\mathcal{P}_{0,\beta}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad \frac{1}{2} \left\| \hat{\phi}_\beta g - T_W f \right\|^2 \\ \text{s.c.} \quad f \in L^2(V) \end{array} \right.$$

Unique solution: $T_W^+(\hat{\phi}_\beta g)$

Approximation de T_W^+ : $\alpha \downarrow 0$

$$(\mathcal{P}_{0,\beta}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad \frac{1}{2} \left\| \hat{\phi}_\beta g - T_W f \right\|^2 \\ \text{s.c.} \quad f \in L^2(V) \end{array} \right.$$

Unique solution: $T_W^+(\hat{\phi}_\beta g)$

Théorème Soit $\beta > 0$ fixé et soit $g \in \mathcal{D}(T_W^+)$.

- (i) Si $\hat{\phi}_\beta g \in \mathcal{D}(T_W^+)$, alors $f_{\alpha,\beta} \rightarrow T_W^+(\hat{\phi}_\beta g)$ lorsque $\alpha \downarrow 0$.
- (ii) Si $\hat{\phi}_\beta g \notin \mathcal{D}(T_W^+)$, alors $\|f_{\alpha,\beta}\|_{L^2(V)} \rightarrow \infty$ lorsque $\alpha \downarrow 0$.

Approximation de T_W^+ : $\alpha \downarrow 0$

$$(\mathcal{P}_{0,\beta}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad \frac{1}{2} \left\| \hat{\phi}_\beta g - T_W f \right\|^2 \\ \text{s.c.} \quad f \in L^2(V) \end{array} \right.$$

Unique solution: $T_W^+(\hat{\phi}_\beta g)$

Proposition Supposons que $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est telle que $\hat{\phi}$ est analytique, et soit $\beta > 0$ fixé et $g \in \mathcal{D}(T_W^+)$. Alors, il y a équivalence entre:

- (i) $\hat{\phi}_\beta g \in \mathcal{D}(T_W^+)$;
- (ii) $\text{supp}(\phi_\beta * T_W^+ g) \subseteq V$.

Approximation de T_W^+ : $\beta \downarrow 0$

Approximation de T_W^+ : $\beta \downarrow 0$

Théorème Supposons que

- $\alpha > 0$ (fixé)

Approximation de T_W^+ : $\beta \downarrow 0$

Théorème Supposons que

- $\alpha > 0$ (fixé)
- $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ avec $\int \phi(x) dx = 1$ (*i.e.* $\hat{\phi}(0) = 1$)

Approximation de T_W^+ : $\beta \downarrow 0$

Théorème Supposons que

- $\alpha > 0$ (fixé)
- $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ avec $\int \phi(x) dx = 1$ (*i.e.* $\hat{\phi}(0) = 1$)
- $|1 - \hat{\phi}(\xi)| \sim_{\xi \rightarrow 0} K\|\xi\|^s$ pour $K, s > 0$

Approximation de T_W^+ : $\beta \downarrow 0$

Théorème Supposons que

- $\alpha > 0$ (fixé)
- $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ avec $\int \phi(x) dx = 1$ (*i.e.* $\hat{\phi}(0) = 1$)
- $|1 - \hat{\phi}(\xi)| \sim_{\xi \rightarrow 0} K \|\xi\|^s$ pour $K, s > 0$
- $\forall \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \hat{\phi}(\xi) \neq 1$

Approximation de T_W^+ : $\beta \downarrow 0$

Théorème Supposons que

- $\alpha > 0$ (fixé)
- $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ avec $\int \phi(x) dx = 1$ (*i.e.* $\hat{\phi}(0) = 1$)
- $|1 - \hat{\phi}(\xi)| \sim_{\xi \rightarrow 0} K \|\xi\|^s$ pour $K, s > 0$
- $\forall \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \hat{\phi}(\xi) \neq 1$

Si $g \in T_W(L^2(V) \cap H^s(\mathbb{R}^d))$, alors $f_{\alpha,\beta} \rightarrow T_W^+ g$ fortement lorsque $\beta \downarrow 0$.

Vue d'ensemble de la preuve

Vue d'ensemble de la preuve

Etape 1: $(f_{\alpha,\beta})_{\beta \in (0,1]}$ est bornée

Vue d'ensemble de la preuve

Etape 1: $(f_{\alpha,\beta})_{\beta \in (0,1]}$ est bornée

Etape 2: $(f_{\alpha,\beta})_{\beta \in (0,1]}$ converge faiblement vers $T_W^+ g$

Vue d'ensemble de la preuve

Etape 1: $(f_{\alpha,\beta})_{\beta \in (0,1]}$ est bornée

Etape 2: $(f_{\alpha,\beta})_{\beta \in (0,1]}$ converge faiblement vers $T_W^+ g$

$$\beta_n \downarrow 0, f_n := f_{\alpha,\beta_n}$$

Vue d'ensemble de la preuve

Etape 1: $(f_{\alpha,\beta})_{\beta \in (0,1]}$ est bornée

Etape 2: $(f_{\alpha,\beta})_{\beta \in (0,1]}$ converge faiblement vers $T_W^+ g$

$$\beta_n \downarrow 0, f_n := f_{\alpha,\beta_n}$$

■ $\exists (f_{n_k}) \rightharpoonup T_W^+ g$

Vue d'ensemble de la preuve

Etape 1: $(f_{\alpha,\beta})_{\beta \in (0,1]}$ est bornée

Etape 2: $(f_{\alpha,\beta})_{\beta \in (0,1]}$ converge faiblement vers $T_W^+ g$

$$\beta_n \downarrow 0, f_n := f_{\alpha,\beta_n}$$

■ $\exists (f_{n_k}) \rightharpoonup T_W^+ g$

Etape 3: La convergence est en fait forte

Vue d'ensemble de la preuve

Etape 1: $(f_{\alpha,\beta})_{\beta \in (0,1]}$ est bornée

Etape 2: $(f_{\alpha,\beta})_{\beta \in (0,1]}$ converge faiblement vers $T_W^+ g$

$$\beta_n \downarrow 0, f_n := f_{\alpha,\beta_n}$$

■ $\exists (f_{n_k}) \rightharpoonup T_W^+ g$

Etape 3: La convergence est en fait forte

$$\left. \begin{array}{l} (f_n) \text{ bornée} \\ \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \sup_n \int_{\|x\| > R} |f_n(x)|^2 dx = 0 \\ \\ \sup_n \|T_h f_n - f_n\| \rightarrow 0 \text{ lorsque } \|h\| \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (f_n) \text{ précompacte}$$

Vue d'ensemble de la preuve

Etape 1: $(f_{\alpha,\beta})_{\beta \in (0,1]}$ est bornée

Etape 2: $(f_{\alpha,\beta})_{\beta \in (0,1]}$ converge faiblement vers $T_W^+ g$

$$\beta_n \downarrow 0, f_n := f_{\alpha,\beta_n}$$

■ $\exists (f_{n_k}) \rightharpoonup T_W^+ g$

Etape 3: La convergence est en fait forte

■ (f_n) est bornée (étape 1)

Vue d'ensemble de la preuve

Etape 1: $(f_{\alpha,\beta})_{\beta \in (0,1]}$ est bornée

Etape 2: $(f_{\alpha,\beta})_{\beta \in (0,1]}$ converge faiblement vers $T_W^+ g$

$$\beta_n \downarrow 0, f_n := f_{\alpha,\beta_n}$$

■ $\exists (f_{n_k}) \rightharpoonup T_W^+ g$

Etape 3: La convergence est en fait forte

■ (f_n) est bornée (étape 1)

■ V borné $\hookrightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \sup_n \int_{\|x\| > R} |f_n(x)|^2 dx = 0$

Vue d'ensemble de la preuve

Etape 1: $(f_{\alpha,\beta})_{\beta \in (0,1]}$ est bornée

Etape 2: $(f_{\alpha,\beta})_{\beta \in (0,1]}$ converge faiblement vers $T_W^+ g$

$$\beta_n \downarrow 0, f_n := f_{\alpha,\beta_n}$$

■ $\exists (f_{n_k}) \rightharpoonup T_W^+ g$

Etape 3: La convergence est en fait forte

■ (f_n) est bornée (étape 1)

■ V borné $\hookrightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \sup_n \int_{\|x\| > R} |f_n(x)|^2 dx = 0$

■ $\sup_n \|T_h f_n - f_n\| \rightarrow 0$ lorsque $\|h\| \rightarrow 0$

Exemples: noyaux de Lévy

Exemples: noyaux de Lévy

$$\left| 1 - \hat{\phi}(\xi) \right| \sim_{\xi \rightarrow 0} \|\xi\|^s$$

Exemples: noyaux de Lévy

$$\left| 1 - \hat{\phi}(\xi) \right| \sim_{\xi \rightarrow 0} \|\xi\|^s$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \quad \hat{\phi}(\xi) \neq 1$$

Exemples: noyaux de Lévy

$$\left| 1 - \hat{\phi}(\xi) \right| \sim_{\xi \rightarrow 0} \|\xi\|^s$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \quad \hat{\phi}(\xi) \neq 1$$

$$\hat{\phi}: \xi \mapsto \exp(-\|\xi\|^s), \quad s \in [0, 2]$$

Exemples: noyaux de Lévy

$$\left| 1 - \hat{\phi}(\xi) \right| \sim_{\xi \rightarrow 0} \|\xi\|^s$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \quad \hat{\phi}(\xi) \neq 1$$

$$\hat{\phi}: \xi \mapsto \exp(-\|\xi\|^s), \quad s \in [0, 2]$$

$$\phi: x \mapsto U^{-1} \exp(-\|\cdot\|^s)(x)$$

Exemples: noyaux de Lévy

$$\left| 1 - \hat{\phi}(\xi) \right| \sim_{\xi \rightarrow 0} \|\xi\|^s$$

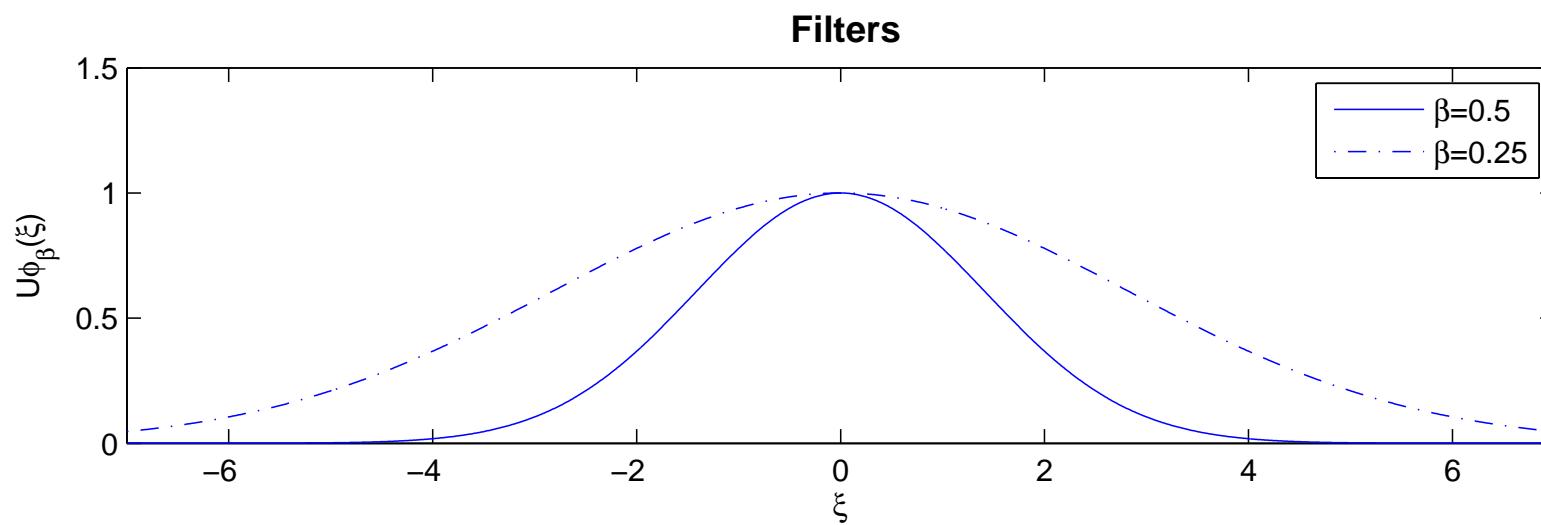
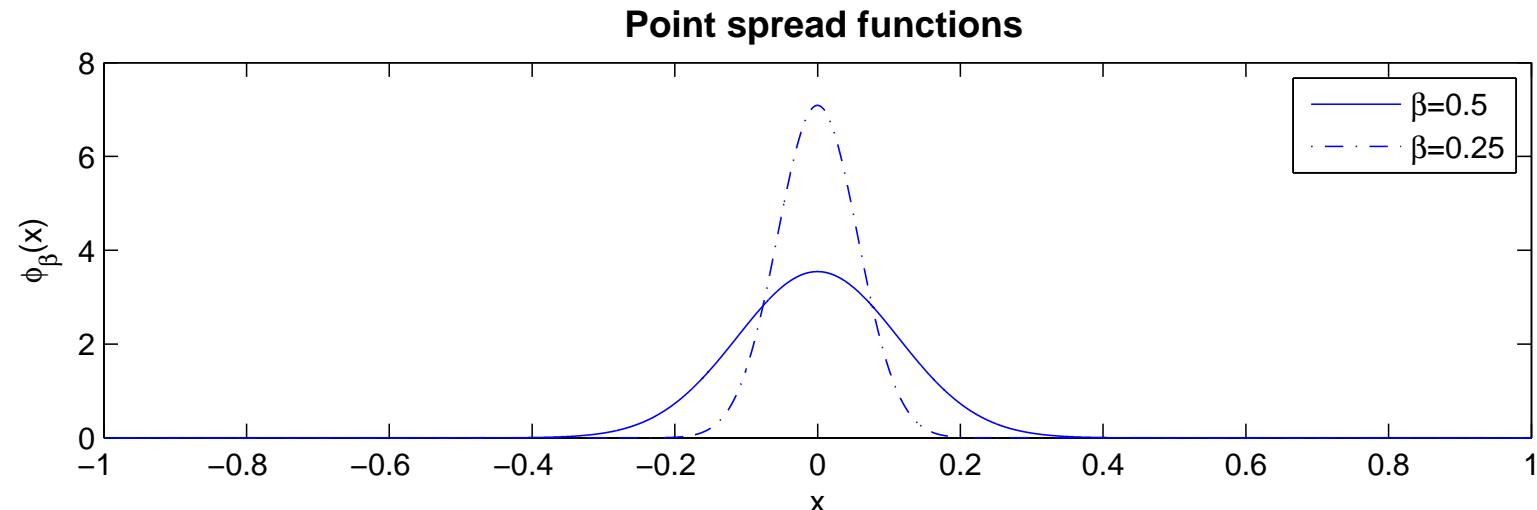
$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \quad \hat{\phi}(\xi) \neq 1$$

$$\hat{\phi}: \xi \mapsto \exp(-\|\xi\|^s), \quad s \in [0, 2]$$

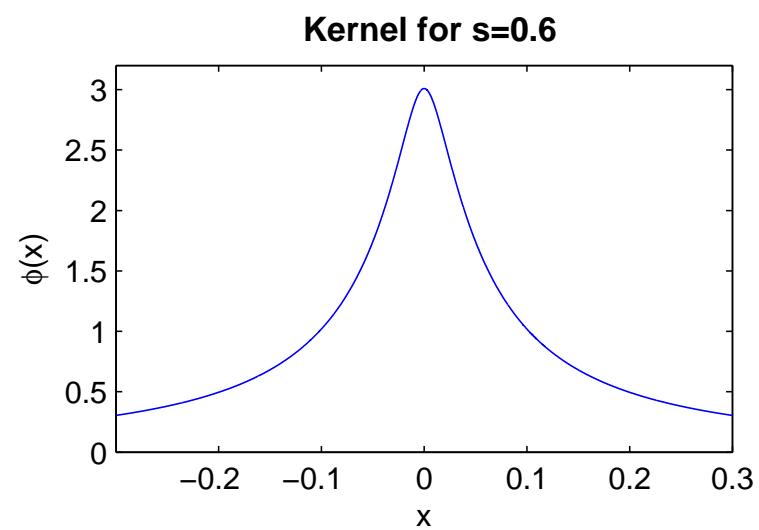
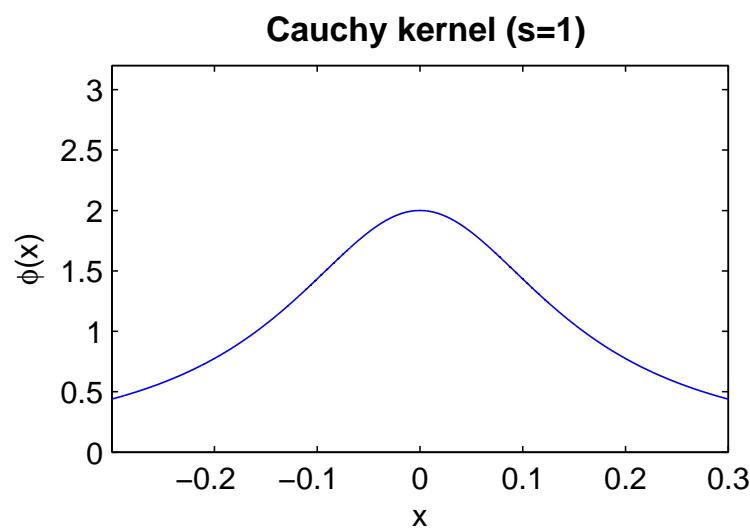
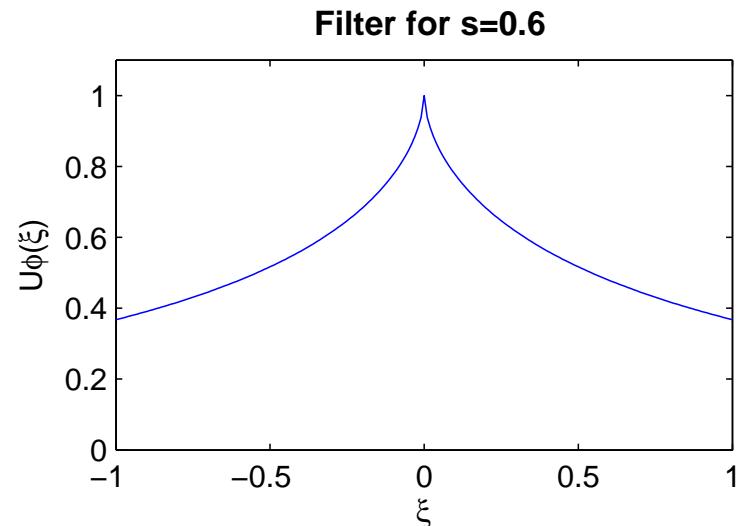
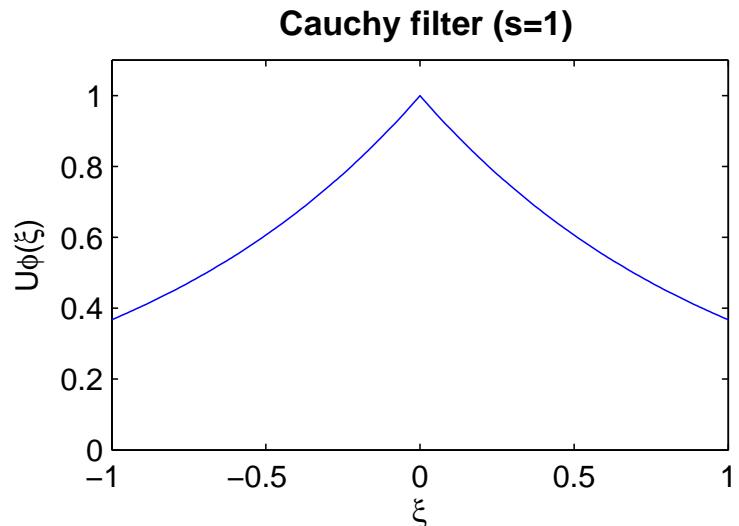
$$\phi: x \mapsto U^{-1} \exp(-\|\cdot\|^s)(x)$$

↪ ϕ est positive, isotrope, radialement décroissante, C^∞

Exemples: noyaux de Lévy



Exemples: noyaux de Lévy



Approche alternative

Equation mal-posée : $Tf_0 = g$ avec : $T: F \rightarrow G$

Approche alternative

Equation mal-posée : $Tf_0 = g$ avec : $T: F \rightarrow G$

$$f_0 = C_\beta f_0 + (I - C_\beta) f_0$$

où C_β approche I lorsque $\beta \downarrow 0$

Approche alternative

Equation mal-posée : $Tf_0 = g$ avec : $T: F \rightarrow G$

$$f_0 = C_\beta f_0 + (I - C_\beta) f_0$$

où C_β approche I lorsque $\beta \downarrow 0$

Supposons qu'il n'existe pas d'opérateur $\Phi_\beta: G \rightarrow G$

tel que $TC_\beta = \Phi_\beta T$

Approche alternative

Equation mal-posée : $Tf_0 = g$ avec : $T: F \rightarrow G$

$$f_0 = C_\beta f_0 + (I - C_\beta) f_0$$

où C_β approche I lorsque $\beta \downarrow 0$

Supposons qu'il n'existe pas d'opérateur $\Phi_\beta: G \rightarrow G$
tel que $TC_\beta = \Phi_\beta T$

$$(Q) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Minimiser } X \mapsto \|TC_\beta - XT\| \\ \text{s.c. } X \in L(G) \end{array} \right.$$

Approche alternative

$T: L^2(V) \rightarrow G, \quad G$ espace de Hilbert

C_β convolution par ϕ_β

Approche alternative

$T: L^2(V) \rightarrow G$, G espace de Hilbert

C_β convolution par ϕ_β

$$(\mathcal{P}_\beta) \text{Minimiser } \frac{1}{2} \left\| \Phi_\beta g - Tf \right\|_G^2 + \frac{\alpha}{2} \left\| (I - C_\beta)f \right\|_F^2$$

$$(\mathcal{Q}) \quad \begin{array}{l|l} \text{Minimiser} & X \mapsto \|TC_\beta - XT\| \\ \text{s.c.} & X \in L(G) \end{array}$$

Approche alternative

$T: L^2(V) \rightarrow G$, G espace de Hilbert

C_β convolution par ϕ_β

$$(\mathcal{P}_\beta) \text{Minimiser } \frac{1}{2} \left\| \Phi_\beta g - Tf \right\|_G^2 + \frac{\alpha}{2} \left\| (I - C_\beta)f \right\|_F^2$$

$$(\mathcal{Q}) \quad \begin{array}{l|l} \text{Minimiser} & X \mapsto \|TC_\beta - XT\| \\ \text{s.c.} & X \in L(G) \end{array}$$

Proposition Si $TC_\beta T^+$ est borné, alors $TC_\beta T^+$ résout (\mathcal{Q}) . La solution de (\mathcal{P}_β) est alors donnée par

$$f_\beta = (T^\sharp T + \alpha I)^{-1} T^\sharp T C_\beta T^+ g.$$

Remarques

1) Le problème (\mathcal{Q}) est mal posé. Toutefois, le second membre TC_β n'est pas sujet à perturbation. On peut utiliser l'algorithme proximal.

Remarques

- 1) Le problème (\mathcal{Q}) est mal posé. Toutefois, le second membre TC_β n'est pas sujet à perturbation. On peut utiliser l'algorithme proximal.
- 2) Le théorème de convergence (lorsque $\beta \downarrow 0$) reste valide dans ce contexte élargi.

Remarques

- 1) Le problème (\mathcal{Q}) est mal posé. Toutefois, le second membre TC_β n'est pas sujet à perturbation. On peut utiliser l'algorithme proximal.
- 2) Le théorème de convergence (lorsque $\beta \downarrow 0$) reste valide dans ce contexte élargi.
- 3) Etude numérique en cours.

Remarques

- 1) Le problème (\mathcal{Q}) est mal posé. Toutefois, le second membre TC_β n'est pas sujet à perturbation. On peut utiliser l'algorithme proximal.
- 2) Le théorème de convergence (lorsque $\beta \downarrow 0$) reste valide dans ce contexte élargi.
- 3) Etude numérique en cours.
- 4) Il semble intéressant de considérer, pour C_β , d'autres opérateurs.

Formulation en dimension finie

$$(P) \quad \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad \frac{1}{2} \| \mathbf{g} - T\mathbf{f} \|_{\mathbb{C}^m}^2 + \frac{\alpha}{2} \| H\mathbf{f} \|_{\mathbb{C}^{mr}}^2 \\ \text{s.c.} \quad \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

Formulation en dimension finie

$$(P) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad \frac{1}{2} \| \mathbf{g} - T\mathbf{f} \|_{\mathbb{C}^m}^2 + \frac{\alpha}{2} \| H\mathbf{f} \|_{\mathbb{C}^{mr}}^2 \\ \text{s.c.} \quad \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

$$g_k \simeq \hat{f}_0(\xi_k) = \int_V e^{-2i\pi \langle x, \xi_k \rangle} f_0(x) \, dx, \quad k = 1, \dots, m$$

Formulation en dimension finie

$$(P) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad \frac{1}{2} \| \mathbf{g} - T\mathbf{f} \|_{\mathbb{C}^m}^2 + \frac{\alpha}{2} \| H\mathbf{f} \|_{\mathbb{C}^{mr}}^2 \\ \text{s.c.} \quad \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

Les composantes de $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ (ou \mathbb{C}^n) sont les coordonnées de l'approximation de f dans le sous-espace de dimension finie engendré par une famille de *fonctions d'interpolation* $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Formulation en dimension finie

$$(P) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad \frac{1}{2} \| \mathbf{g} - T\mathbf{f} \|_{\mathbb{C}^m}^2 + \frac{\alpha}{2} \| H\mathbf{f} \|_{\mathbb{C}^{mr}}^2 \\ \text{s.c.} \quad \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

$T \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ est la matrice dont le coefficient (j, k) est la transformée de Fourier de e_k en ξ_j

Formulation en dimension finie

$$(P) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad \frac{1}{2} \| \mathbf{g} - T\mathbf{f} \|_{\mathbb{C}^m}^2 + \frac{\alpha}{2} \| H\mathbf{f} \|_{\mathbb{C}^{m_r}}^2 \\ \text{s.c.} \quad \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

$H \in M_{m_r \times n}(\mathbb{C})$ est définie de la même manière, avec ξ_j remplacé par *points d'échantillonnage de régularisation*.

Formulation en dimension finie

Problème générique:

$$\text{Minimiser} \quad \Phi(\mathbf{f}) - \Psi(T\mathbf{f}) \quad \text{avec} \quad \left| \begin{array}{ll} \Phi & \text{convexe} \\ \Psi & \text{concave} \end{array} \right.$$

Formulation en dimension finie

Problème générique:

$$\text{Minimiser} \quad \Phi(\mathbf{f}) - \Psi(T\mathbf{f}) \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l|l} \Phi & \text{convexe} \\ \Psi & \text{concave} \end{array}$$

Dualité de Fenchel:

$$\inf_{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n} \{\Phi(\mathbf{f}) - \Psi(T\mathbf{f})\} = \max_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m} \{\Psi_*(\boldsymbol{\lambda}) - \Phi^*(T^*\boldsymbol{\lambda})\}$$

Formulation en dimension finie

Problème générique:

$$\text{Minimiser} \quad \Phi(\mathbf{f}) - \Psi(T\mathbf{f}) \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l|l} \Phi & \text{convexe} \\ \Psi & \text{concave} \end{array}$$

Dualité de Fenchel:

$$\inf_{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n} \{\Phi(\mathbf{f}) - \Psi(T\mathbf{f})\} = \max_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m} \{\Psi_*(\boldsymbol{\lambda}) - \Phi^*(T^*\boldsymbol{\lambda})\}$$

Relation Primale-duale:

$$\bar{\mathbf{f}} = \nabla \Phi^*(T^*\bar{\boldsymbol{\lambda}})$$

Dimension semi-infinie

(P)

$$\begin{aligned} & \text{Minimiser} \quad \frac{1}{2\alpha} \left\| \mathbf{g} - \mathcal{T}f \right\|_{\mathbb{C}^m}^2 + \frac{1}{2} \left\| T_{W_\beta} f \right\|_{L^2(W_\beta)}^2 \\ & \text{s.c.} \quad f \in L^2(V) \end{aligned}$$

Dimension semi-infinie

$$\begin{array}{|l} (\mathcal{P}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad \frac{1}{2\alpha} \left\| \mathbf{g} - \mathcal{T}f \right\|_{\mathbb{C}^m}^2 + \frac{1}{2} \left\| T_{W_\beta} f \right\|_{L^2(W_\beta)}^2 \\ \text{s.c.} \quad f \in L^2(V) \end{array} \right. \end{array}$$

$$(\mathcal{T}f)_k := \int_V e^{-2i\pi \langle x, \xi_k \rangle} f(x) \, dx, \quad k = 1, \dots, m;$$

Dimension semi-infinie

$$(\mathcal{P}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad \frac{1}{2\alpha} \left\| \mathbf{g} - \mathcal{T}f \right\|_{\mathbb{C}^m}^2 + \frac{1}{2} \left\| T_{W_\beta} f \right\|_{L^2(W_\beta)}^2 \\ \text{s.c.} \quad f \in L^2(V) \end{array} \right.$$

$$(\mathcal{T}f)_k := \int_V e^{-2i\pi \langle x, \xi_k \rangle} f(x) \, dx, \quad k = 1, \dots, m;$$

$$(\mathcal{T}^\star \boldsymbol{\lambda})(x) = \mathbb{1}_V(x) \sum_{k=1}^m g_k e^{-2i\pi \langle x, \xi_k \rangle}$$

Dimension semi-infinie

$$(\mathcal{P}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad \frac{1}{2\alpha} \left\| \mathbf{g} - \mathcal{T}f \right\|_{\mathbb{C}^m}^2 + \frac{1}{2} \left\| T_{W_\beta} f \right\|_{L^2(W_\beta)}^2 \\ \text{s.c.} \quad f \in L^2(V) \end{array} \right.$$

$$(\mathcal{T}f)_k := \int_V e^{-2i\pi \langle x, \xi_k \rangle} f(x) \, dx, \quad k = 1, \dots, m;$$

$$(\mathcal{T}^\star \boldsymbol{\lambda})(x) = \mathbb{1}_V(x) \sum_{k=1}^m g_k e^{-2i\pi \langle x, \xi_k \rangle}$$

$$T_{W_\beta} f = \mathbb{1}_{W_\beta} U f$$

Conjugaison: réelle/complexé

$$\Phi^\star(\xi) := \sup_x \{ \langle \xi, x \rangle - \Phi(x) \} \quad (\text{convexe})$$

$$\Psi_\star(\xi) := \inf_x \{ \langle \xi, x \rangle - \Psi(x) \} \quad (\text{concave})$$

Conjugaison: réelle/complexé

$$\Phi^*(\xi) := \sup_x \{ \langle \xi, x \rangle - \Phi(x) \} \quad (\text{convexe})$$

$$\Psi_*(\xi) := \inf_x \{ \langle \xi, x \rangle - \Psi(x) \} \quad (\text{concave})$$

Cas complexe:

$$\Phi^*(\xi) := \sup_x \{ \operatorname{Re} \langle \xi, x \rangle - \Phi(x) \} \quad (\text{convexe})$$

$$\Psi_*(\xi) := \inf_x \{ \operatorname{Re} \langle \xi, x \rangle - \Psi(x) \} \quad (\text{concave})$$

Dualité (version complexe)

Théorème

- X espace de Hilbert complexe
(de produit hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$)

Dualité (version complexe)

Théorème

- X espace de Hilbert complexe
(de produit hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$)
- $\mathcal{T}: X \rightarrow \mathbb{C}^m$ application linéaire d'adjoint \mathcal{T}^*

Dualité (version complexe)

Théorème

- X espace de Hilbert complexe
(de produit hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$)
- $\mathcal{T}: X \rightarrow \mathbb{C}^m$ application linéaire d'adjoint \mathcal{T}^*
- $\Phi: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ convexe propre

Dualité (version complexe)

Théorème

- X espace de Hilbert complexe
(de produit hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$)
- $\mathcal{T}: X \rightarrow \mathbb{C}^m$ application linéaire d'adjoint \mathcal{T}^*
- $\Phi: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ convexe propre
- $\Psi: \mathbb{C}^m \rightarrow [-\infty, \infty)$ concave propre

Dualité (version complexe)

Théorème

- X espace de Hilbert complexe
(de produit hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$)
- $\mathcal{T}: X \rightarrow \mathbb{C}^m$ application linéaire d'adjoint \mathcal{T}^*
- $\Phi: X \rightarrow (-\infty, \infty]$ convexe propre
- $\Psi: \mathbb{C}^m \rightarrow [-\infty, \infty)$ concave propre

Sous une certaine condition de qualification,

$$\inf_{x \in X} \{\Phi(x) - \Psi(\mathcal{T}x)\} = \max_{\lambda \in \mathbb{C}^m} \{D(\lambda) := \Psi_\star(\lambda) - \Phi^*(\mathcal{T}^*\lambda)\}.$$

Problèmes primal et dual

$$\begin{array}{|l} \text{(P)} \\ \hline \text{Minimiser} \quad \frac{1}{2\alpha} \left\| \mathbf{g} - \mathcal{T}f \right\|_{\mathbb{C}^m}^2 + \frac{1}{2} \left\| T_{W_\beta} f \right\|_{L^2(W_\beta)}^2 \\ \text{s.c.} \quad f \in L^2(V) \end{array}$$

Problèmes primal et dual

$$\begin{array}{|l} (\mathcal{P}) \\ \hline \text{Minimiser} \quad \frac{1}{2\alpha} \left\| \mathbf{g} - \mathcal{T}f \right\|_{\mathbb{C}^m}^2 + \frac{1}{2} \left\| T_{W_\beta} f \right\|_{L^2(W_\beta)}^2 \\ \text{s.c.} \quad f \in L^2(V) \end{array}$$

$$\Phi(f) := \frac{1}{2} \left\| T_{W_\beta} f \right\|_{L^2(W_\beta)}^2$$

Problèmes primal et dual

$$(\mathcal{P}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad \frac{1}{2\alpha} \|\mathbf{g} - \mathcal{T}f\|_{\mathbb{C}^m}^2 + \frac{1}{2} \|T_{W_\beta} f\|_{L^2(W_\beta)}^2 \\ \text{s.c.} \quad f \in L^2(V) \end{array} \right.$$

$$\Phi(f) := \frac{1}{2} \|T_{W_\beta} f\|_{L^2(W_\beta)}^2$$

$$(\mathcal{D}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Maximiser} \quad D(\boldsymbol{\lambda}) := \operatorname{Re} \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\lambda} \rangle - \frac{\alpha}{2} \|\boldsymbol{\lambda}\|^2 - \Phi^\star(\mathcal{T}^\star \boldsymbol{\lambda}) \\ \text{s.c.} \quad \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}^d \end{array} \right.$$

Relation primale-duale

Si $\bar{\lambda}$ maximise la fonction duale, alors $\bar{x} := \Phi^{\star'}(\mathcal{T}^* \bar{\lambda})$ est solution du problème primal.

Relation primale-duale

Si $\bar{\lambda}$ maximise la fonction duale, alors $\bar{x} := \Phi^{\star'}(\mathcal{T}^* \bar{\lambda})$ est solution du problème primal.

$$\Phi(f) = \frac{1}{2} \| T_{W_\beta} f \|_{L^2(W_\beta)}^2 \hookrightarrow \Phi^\star(\varphi) = \frac{1}{2} \| (T_{W_\beta}^\star)^{-1} \varphi \|_{L^2(W_\beta)}^2$$

Relation primale-duale

Si $\bar{\lambda}$ maximise la fonction duale, alors $\bar{x} := \Phi^{\star'}(\mathcal{T}^* \bar{\lambda})$ est solution du problème primal.

$$\Phi(f) = \frac{1}{2} \| T_{W_\beta} f \|_{L^2(W_\beta)}^2 \hookrightarrow \Phi^\star(\varphi) = \frac{1}{2} \| (T_{W_\beta}^\star)^{-1} \varphi \|_{L^2(W_\beta)}^2$$

$$\Phi^{\star'}(\varphi) = (T_{W_\beta}^\star T_{W_\beta})^{-1} \varphi$$

Relation primale-duale

Si $\bar{\lambda}$ maximise la fonction duale, alors $\bar{x} := \Phi^{\star'}(\mathcal{T}^{\star}\bar{\lambda})$ est solution du problème primal.

$$\Phi(f) = \frac{1}{2} \| T_{W_\beta} f \|_{L^2(W_\beta)}^2 \hookrightarrow \Phi^\star(\varphi) = \frac{1}{2} \| (T_{W_\beta}^\star)^{-1} \varphi \|_{L^2(W_\beta)}^2$$

$$\Phi^{\star'}(\varphi) = (T_{W_\beta}^\star T_{W_\beta})^{-1} \varphi$$

$$(T_{W_\beta}^\star T_{W_\beta})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I - T_{W_\beta}^\star T_{W_\beta})^k = \sum_{k=0}^{\infty} (T_{B_{1/\beta}}^\star T_{B_{1/\beta}})^k$$

Calculs de $D(\boldsymbol{\lambda})$ et $\nabla D(\boldsymbol{\lambda})$

$$D(\boldsymbol{\lambda}) = \operatorname{Re} \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\lambda} \rangle - \frac{\alpha}{2} \|\boldsymbol{\lambda}\|^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left\langle \mathcal{T}(T_{B_{1/\beta}}^* T_{B_{1/\beta}})^k \mathcal{T}^* \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \right\rangle$$

Calculs de $D(\boldsymbol{\lambda})$ et $\nabla D(\boldsymbol{\lambda})$

$$D(\boldsymbol{\lambda}) = \operatorname{Re} \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\lambda} \rangle - \frac{\alpha}{2} \|\boldsymbol{\lambda}\|^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left\langle \mathcal{T}(T_{B_{1/\beta}}^* T_{B_{1/\beta}})^k \mathcal{T}^* \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \right\rangle$$

$$\nabla D(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{g} - \alpha \boldsymbol{\lambda} - \mathcal{T} \sum_{k=0}^{\infty} (T_{B_{1/\beta}}^* T_{B_{1/\beta}})^k \mathcal{T}^* \boldsymbol{\lambda}$$

Calculs de $D(\boldsymbol{\lambda})$ et $\nabla D(\boldsymbol{\lambda})$

$$D(\boldsymbol{\lambda}) = \operatorname{Re} \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\lambda} \rangle - \frac{\alpha}{2} \|\boldsymbol{\lambda}\|^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left\langle \mathcal{T}(T_{B_{1/\beta}}^* T_{B_{1/\beta}})^k \mathcal{T}^* \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \right\rangle$$

$$\nabla D(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{g} - \alpha \boldsymbol{\lambda} - \mathcal{T} \sum_{k=0}^{\infty} (T_{B_{1/\beta}}^* T_{B_{1/\beta}})^k \mathcal{T}^* \boldsymbol{\lambda}$$

$$\bar{f} = \Phi^{\star'}(\mathcal{T}^* \bar{\boldsymbol{\lambda}}) = \sum_{k=0}^{\infty} (T_{B_{1/\beta}}^* T_{B_{1/\beta}})^k \mathcal{T}^* \bar{\boldsymbol{\lambda}}$$