Groupes

Agrégation interne 2019-2020

Exercice 1 :
Soient a et b deux éléments d'un groupe $(G, .)$, vérifiant $ab = ba$. Si a est d'ordre m, b d'ordre n, et si m et n sont premiers entre eux, montrer que ab est d'ordre mn.

Exercice 2 :

1. Soit $(G_1, .)$ et $(G_2, .)$ deux groupes. Démontrer qu'il existe sur le produit cartésien $G := G_1 \times G_2$ une structure de groupe, et une seule, telle que les projections notées p_1 et p_2 soient des morphismes de groupe.
2. Soit H un groupe, et f_i, $i \in [\![1, 2]\!]$ deux morphismes de H sur G_i.

   Montrer qu'il existe un morphisme f de H sur G, tel que l'on ait $\forall i \in [\![1, 2]\!]$, $p_i \circ f = f_i$.
3. Soit H_1 (respectivement H_2) un sous-groupe de G_1 (respectivement G_2). Montrer qur $H = H_1 \times H_2$ est un sous-groupe de G.

   Montrer de plus que si, H_1 et H_2 sont distingués, H l'est aussi.

Exercice 3 :
Cet exercice ne sera pas corrigé. C'est un rappel sur la notion de partie engendrée, ici plus petit sous-groupe au sens de l'inclusion qui contient cette partie.

1. Soit $(G, .)$ un groupe, A une partie de G. On note $< A >$ le sous-groupe de G engendré par A, i.e le plus petit sous-groupe de G qui contient A.

   Si $A = \varnothing$, remarquer que $< A >= \{e\}$. On suppose désormais A non vide. On pose alors $A^{-1} := \{a^{-1}, a \in A\}$.

   Montrer que $< A >$ est constitué des éléments de G qui peuvent s'écrire comme produit d'un nombre fini d'éléments de $A \cup A^{-1}$.

   Exemples :

   (a) Soit $x \in G$, $A = \{x\}$. On note $< A >$, $< x >$. C'est un groupe monogène. Montrer que $< x >= \{x^n, n \in \mathbb{Z}\}$. Quelle est la notation pour un groupe abélien ?

   (b) Soit $(x, y) \in G^2$ tel que $xy = yx$. Montrer que $< A >= \{x^m y^n, (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$. Pour un groupe abélien, que trouve-t-on ?

   (c) Soit $(G, +)$ un groupe abélien, et A une partie de G, non vide, et stable par $+$. Montrer que $< A >= \{x - y; (x, y) \in A^2\}$.
2. Soit $\varphi : G \longrightarrow G$ un morphisme de groupes. Montrer que $\varphi(< A >) =< \varphi(A) >$.

   Applications :

   (a) Si G est un groupe monogène, alors $\varphi(G)$ est un groupe monogène.

   (b) Si G est un groupe cyclique, $\varphi(G)$ est cyclique.

Exercice 4 :
Cet exercice ne sera pas corrigé. Il permet juste de faire un rappel sur le lien qu'il y a entre les groupes et les morphismes de groupes Soit $(G, .)$ un groupe. On note $Aut(G)$ l'ensemble des automorphismes de G.

1. Montrer que $Aut(G)$ muni de la loi de composition $\circ$ est un groupe.
2. Soit $a \in G$. On définit l'application φ_a de G dans G par $\varphi_a(x) = axa^{-1}$. Montrer que $\varphi_a \in Aut(G)$.
3. Montrer que $\varphi_{ab} = \varphi_a \circ \varphi_b$.
4. Soit H un sous-groupe de $Aut(G)$ et
$$\begin{array}{llll} \varphi : & G & \longrightarrow \mathcal{P}(G) \\ & x & \longmapsto \{f(x); f \in H\} \end{array}$$
$\varphi(x)$ est appelé l'orbite de x sous H. Vérifier que $\varphi(G)$ est une partition de G.
5. Soit Φ l'application de G dans $Aut(G)$ qui à tout $a \in G$ associe φ_a. Montrer que Φ est un homomorphisme de groupes. Déterminer son noyau noté $Ker\Phi$.

Exercice 5 :
Quels sont les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$?

Exercice 6 :
Soit E un ensemble fini de cardinal impair, et φ une involution de E. Montrer que φ admet au moins un point fixe.

1. Soit G un groupe fini d'ordre n pair. Montrer qu'il existe $x \in G$, $x \neq e$ tel que $x^2 = e$.
2. Soit G un groupe fini et $A := \{x \in G, x^2 \neq e\}$. Montrer que le cardinal de A est pair.
3. Appliquer ceci au cas des groupes d'ordre 4 et 6. Dresser la table de chacun des groupes obtenus.

Pour $n = 4$, on trouve $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et le groupe de Klein.
Pour $n = 6$, on trouve $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ le groupe des permutations d'un ensemble à 3 éléments, noté $\mathcal{S}_3$, qui n'est pas abélien.
Montrer au passage que les groupes $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sont isomorphes.

Exercice 7 :
Dans le plan affine euclidien, on considère deux droites perpendiculaires D et Δ se coupant en O. On appelle I, s, d, δ l'identité, la symétrie centrale de centre O, la symétrie orthogonale par rapport à D et celle par rapport à Δ.
Montrer que ces 4 isométries forment un groupe pour la loi $\circ$, dont on montrera qu'il est isomorphe au groupe de Klein.

Exercice 8 :
Soit f un endomorphisme du groupe additif $\mathbb{R}$.

1. Montrer que quel que soit $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{Q}$, on a
$$f(ax) = af(x)$$

2. Montrer que si l'on suppose f continue (resp monotone), on a la même propriété pour $\forall a \in \mathbb{R}$.

3. conclure

Exercice 9 :

1. Soit $(G, .)$ un groupe. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) G est un groupe monogène.
   (b) Il existe un morphisme surjectif du groupe $(\mathbb{Z}, +)$ sur le groupe $(G, .)$.

2. En déduire que tout sous-groupe et tout groupe quotient d'un groupe monogène (respectivement cyclique) est monogène (respectivement cyclique).

Exercice 10 :
Soient $(G_1, .)$ et $(G_2, .)$ deux groupes et $G = G_1 \times G_2$ le groupe muni de la loi produit.

1. Soient $x_1 \in G_1$ (resp $x_2 \in G_2$) d'ordre n_1 (resp n_2) ; quel est l'ordre de $x := (x_1, x_2)$ dans G ?

2. On suppose que G_1 (resp G_2) est cyclique d'ordre n_1 (resp n_2). Montrer que si $n_1 \wedge n_2 = 1$, alors $G := G_1 \times G_2$ est cyclique d'ordre $n_1 n_2$.

   Remarquons que la réciproque de cette dernière propriété est eaxcte : si G est cyclique, alors $n_1 \wedge n_2 = 1$.

3. Applications :
   (a) Montrer le théorème chinois : si n_1 et n_2 sont premiers entre eux, alors $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n_1 n_2\mathbb{Z}$.
   Donner une autre preuve de ce lemme en utilisant le morphisme de groupes suivant:
   $$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z} \\ & k & \longmapsto & (\dot{k}, \overline{k}) \end{array}$$
   où $(\dot{k})$ désigne la classe *modulo* n_1 de k, et $\overline{k}$ celle *modulo* n_2.
   (b) Déduire la propriété suivante : si A_1 (resp A_2) est une classe d'entiers *modulo* n_1 (resp *modulo* n_2), alors $A_1 \cap A_2$ est non vide, et est une classe d'entiers *modulo* $n_1 n_2$.
   Retrouver ce résultat à l'aide du théorème de Bezout.

4. Etendre les résultats précèdents à p entiers premiers entre eux deux à deux.

Exercice 11 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle indicateur d'Euler le nombre
$$\varphi(n) := Card(\{k \in [\![1, n]\!] / k \wedge n = 1\}).$$
Soit $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Pour k entier, on note $\overline{k}$ la classe de k *modulo* n.

1. (a) Quel est l'ordre de $\overline{k}$ dans G ?
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\overline{k}$ engendre G.
   (c) Quel est le nombre de générateur de G ?
2. Soient N_1, n_2 deux entiers naturels premiers entre eux. Montrer que $\varphi(n_1 n_2) = \varphi(n_1)\varphi(n_2)$.

   Généraliser ce résultat.
3. Soit p un nombre premier. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\varphi(p)$, puis $\varphi(p^k)$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. On considère la décomposition enfacteurs premiers de n : $\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$.

   Etablir l'égalité :
   $$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{r}(1 - \frac{1}{p_i}).$$

Exercice 12 :
Soit $(G, .)$ un groupe cyclique d'ordre n, et x un générateur de G.
Soit d un diviseur de n, et $G_d := \{g \in G / g^d = e\}$.

1. Montrer que G_d est un groupe cyclique d'ordre d.

   Montrer que G_d est l'unique sous-groupe d'ordre d de G.
2. Montrer que G contient $\varphi(d)$ éléments d'ordre d. Donner des exemples.
3. Soit D_n l'ensemble des diviseurs de n. Montrer que
   $$\sum_{d \in D_n} \varphi(d) = n$$
4. Etablissons la réciproque de la propriété précèdente :

   Soit $(G, .)$ un groupe fini d'ordre n tel que, pour tout diviseur d de n, G contient au plus d éléments g tels que $g^d = e$.

   Pour $d \in D_n$, on note $\Psi(d)$ le cardinal de l'ensemble des éléments de G d'ordre d. Montrer que $\Psi(d) = 0$ ou $\Psi(d) = \varphi(d)$.

   En déduire que G est cyclique.
5. Application : Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $\mathbb{K}^*$ le groupe multiplicatif des éléments non nuls de $\mathbb{K}$.

   Montrer que tout sous-groupe fini de $\mathbb{K}^*$ est cyclique.

   (Indication : si G est un sous-groupe fini de $\mathbb{K}^*$, d'ordre n, et si $d \in D_n$, utiliser le polynôme $X^d - 1$ à coefficients dans $\mathbb{K}$).