METHODES GENERALES EN ALGEBRE LINEAIRE:
notions travaillées: sous espaces vectoriels, applications linéaires, noyau/image,sommes de sev (directes ou non), projecteurs et symétries, familles de vecteurs (libres, génératrices, bases) , dualité, formes linéaires, trasposée d'endomorphisme et interprettaion matricielle, sous espaces stables, valeur/vecteur propre, réduction.

DECOMPOSITION DE VECTEURS

1. Dans le $\mathbb{R}$ espace classique E=$\mathbb{R}_2$[X] des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2 on considère la partie A formée par les polynômes P tels que P(1)=P'(2).

a) Montrer que A est un sous espace de E et déterminer en une base.
b) On note B le plan vectoriel engendré par le couple (1, X^2). Montrer que E est somme des sous espaces A et B. S'agît il d'une somme directe ?

2. Soit S le $\mathbb{R}$ espace usuel des suites à valeurs réelles.

a) Montrer que l'ensemble des suites géométriques de raison 2 est une droite de S.
b) Montrer que l'ensemble des suites arithmétiques est un plan vectoriel de S.
c) L'ensemble des suites géométriques est il un sous espace de S?

3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, a et b deux vecteurs de E et S le système défini par les trois vecteurs $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b}$; $\vec{v} = \sqrt{5}\vec{a} - \vec{b}$; $\vec{w} = \vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$.
Montrer que S est lié et donner une relation de dépendance linéaire précise entre ses vecteurs.

4. On note E le $\mathbb{R}$ espace classique des suites à valeurs réelles et on considère l'application T de E vers E qui transforme tout élément u de E en la suite v= T(u) de terme général défini par : $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n=3u_{n+1}-2u_n$

a) Montrer que T est $\mathbb{R}$ linéaire.
b) T est elle injective?
c) Montrer que T est surjective.

5. Soit f un élément de L_K(E,F). Montrer que si A est sous espace de E : $f^{-1}(f(A))=A+\mathrm{Ker}(f)$

6. On considère l'application g de $\mathbb{R}_3$[X] vers lui même qui fait correspondre à tout élément P de cet espace le polynôme $Q= g(P)$ défini par : $Q(X) = \frac{P(1)}{2}(X^2-3)+P(X)$
Montrer que g est une projection. Déterminer son support et sa direction.

7. Soit S=(e_1, e_2,…., e_n) un système libre d'un $\mathbb{C}$ espace E.
Le système S'=(e_1+e_2, e_2+e_3,….., e_{n-1}+e_n, e_n+e_1) est-il également libre ?

8. Dans le $\mathbb{R}$-espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ montrer que le système de n vecteurs définis par les formules : sin(x), sin(2x), …., sin(nx) , est libre quel que soit l'entier n non nul.
(On pourra procéder par récurrence et mettre à profit l'outil de la dérivation.)
Idem avec $\sin(x), \sin^2(x), \sin^3(x), \ldots, \sin^n(x)$ (penser DL ou ploynômes)

9. Montrer que la famille de fonctions $(x \mapsto exp(ax))_{a\in\mathbb{R}}$ est libre

DIMENSION

10. Soit E=F⊕H somme directe d'un sous espace F de E avec un sev de dimension finie de E. Montrer que tout sous espace G de E tel que E=F⊕G vérifie dim G= dim H.

cette dimension commune de G et H est appelée codimension de F

11. Soit $a_0, ..., a_n \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts. Montrer que l'application de $\mathbb{C}[X]$ vers $\mathbb{C}^{n+1}$ qui à P associe $(P(a_0), ..., P(a_n))$ est un isomorphisme.

DUALITE

12. Pouvez vous expliciter la phrase suivante : « en dimension finie les formes linéaires sont assimilables à des matrices lignes ; en particulier le noyau d'une matrice est l'intersection des noyaux des formes linéaires correspondant à ses lignes. » ?

13. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soient $f, g \in E^*$ non-nulles.
a) Démontrer qu'il existe $u \in E$ tel que $f(u) \neq 0$ et $g(u) \neq 0$.
b) On suppose qu'il existe p formes linéaires $f_1, , f_p \in E^*$ telles que
$\forall x \in E, (f_1(x) = ... = f_p(x) = 0) \Rightarrow x = 0.$ Démontrer que $dim(E) \leq p.$

14. Soit u un endomorphisme d'un K-ev E de dim finie et ${}^tu$ sa transposée. a) Montrer qu'un sev F de E est stable par u ssi $F^{\perp}$ est stable par ${}^tu$. b) Rappeler le lien entre transposée d'un endomorphisme et transposée d'une matrice. En déduire que u et ${}^tu$ ont le même polynôme caractéristique. c) Montrer que ${}^tu$ est trigonalisable ssi u l'est d) Montrer que si u admet une valeur propre dans K il existe aussi un hyperplan stable par u.

15. Soit $E = K_n[X]$ et soit $\varphi \in E^*$ telle que, pour tout $P \in K_{n-1}[X]$, on a $\varphi((X-a)P) = 0$. Démontrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que, pour tout $P \in E, \varphi(P) = \lambda P(a)$.

16. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $(f_1, ..., f_p)$ des formes linéaires sur E et $f \in E^*$
Démontrer que $\cap_{i=1}^{p} ker(f_i) \subset ker(f) \Leftrightarrow f \in vect(f_1, , f_p)$.
(traiter le cas où $(f_1, ..., f_p)$ est libre et introduire une certaine matrice comme à l'exo 12, puis généraliser)

REDUCTION

17. Enoncer la décomposition de Dunford et le théorème de Cayley-Hamilton

18. Soit E un ev de dim finie et f,g des endomorphismes de E diagonalisables et qui commutent. Montrer que tout sous espace caractéristique de f est stable par g. Montrer qu'il existe une base de E qui diagonalise simultanément f et g.

19. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Mq $\lim\limits_{n \to +\infty} A^n = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1$ où $\rho(A)$ est le max des modules des valeurs propres de A.

20. Soit E un ev de dim finie et $f_1, ..., f_n$ des endomorphismes de E trigonalisables et qui commutent 2 à 2.
a) Montrer par récurrence sur dim E que tout $f_1, ..., f_n$ admettent un vecteur propre commun.
b) En considérant les transposées de $f_1, ..., f_n$ montrer que $f_1, ..., f_n$ admettent un hyperplan stable.
c) En déduire un argument par récurrence montrant que $f_1, ..., f_n$ sont simultanément trigonalisables (dans une même base).