Leçon 120

Changements de bases en algèbre linéaire (applications linéaires, formaes bilinéaires,...). Applications.

Le programme de l'agrégation interne est ... vaste. Je mets juste les numéros de paragraphe. *B5b (Matrices de changement de base, matrices équivalentes, rang, matrices semblables, systèmes), B5c, B5e, B5f (formes linèaires), B5g (réduction: diagonalisation, trigonalisation, digonalisation simultanée, applications à l'analyse),B5i (matrices cingruentes, formes quadratiques, applications aux coniques et quadriques, application à l'analyse des données),B7a (Orthonormalisation de Schmidt, B7e.*
Prérequis : notions de bases, de matrices.

0.1 Matrices de changement de base

0.1.1 Généralités

Définition 0.1.1

Soit B et B' deux bases de E, on appelle matrice de changement de base (ou de passage) de B vers B' la matrice de l'identité considérée comme application de E munie de la base B' vers E munie de la base B.

Théoreme 0.1.1

Si un vecteur a pour coordonnées X dans B et X' dans B', et si P est la matrice de changement de base de B vers B', alors $X = PX'$.

Remarque : les matrices de passage sont inversibles.

0.1.2 Matrices d'une applications linéaire dans différentes bases

Proposition 0.1.2

Soit f un application linéaire de E vers F, B et B' deux bases de E, C et C' deux bases de F, P la matrice de changement de bases de B vers B', Q celle de C vers C', M la matrice de f par rapport à B et C et M' celle de f par rapport à B' et C' alors

$$M' = Q^{-1}MP$$

Définition 0.1.2

Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}$ sont équivalentes si elles représentent une même application linéaire dans des bases différentes.
Cela veut encore dire qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que $N = Q^{-1}MP$.

Proposition 0.1.3

C'est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Théoreme 0.1.4

Soit une matrice M de rang r. Alors M est équivalente à

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{p-r,r} & 0_{p-r,n-r} \end{array}\right).$$

Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang, et il y a $min(n,p)+1$ classes d'équivalence.

0.1.3 Cas particulier ou $E = F$, i.e, f est un endomorphisme

Soit f un endomorphisme de E, M sa matrice dans la base B, et M' sa matrice dans la base B', et P la matrice de passage de B vers B'. Alors

$$M' = P^{-1}MP$$

C'est une application immédiate du paragraphe précèdant.

Définition 0.1.3

Deux matrices carrées sont semblables si elles représentent le même endomorphisme. Ou encore, s'il exo=iste P inversible telle que $M' = P^{-1}MP$.

C'est encore une relation d'équivalence, plus fine que la précèdente (les classes d'équvalnce pour la relation "semblble" sont incluses dans celles de la relation "équivalente".

Théoreme 0.1.5

Des matrices équivalentes ont mêmes rang, trace, déterminant, polynôme caractéristique, polynôme minimal.

0.1.4 Applications

1. trigonalisation
2. diagonalisation
3. systèmes de récurrence linéaire, systèmes différentiels linéaires.

Il est envisageable de faire un paragraphe sur les formes linéaires, qui sont particulières, et notament sur le fait que la matrice de passage est composée des images de B' par la base duale de B.

0.2 Algèbre euclidienne

Soit q une forme quadratique sur E, de matrice M dans B et M' dans B', et soit P la matrice de passage de B vers B'. Alors

Proposition 0.2.6

$$M' = {}^tPMP.$$

Définition 0.2.4

On dit que deux matrices symétriques sont congruentes si elles représentent la même forme quadratique.

C'est encore une relation d'équivalence, mais qui n'est pas comparable aux eux autres.

Théoreme 0.2.7

Dans la cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, toute matrice symétrique de rang r est congruente à

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-r} \end{array}\right).$$

Deux matrices sont congruentes si et seulement si elles ont même rang (donc si et seulement si elles sont équivalentes).

Théoreme 0.2.8

Dans la cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, pour une matrice symétrique M , il existe un unique couple d'entiers naturels (s, t) tel que M soit congrue à

$$\left(\begin{array}{c|c|c} I_s & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_t & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0_{n-s-t} \end{array}\right)$$

Le couple (s, t) est appelé la signature de la matrice.
Deux matrices symétriques réelles sont congruentes si et seulement si elles ont même signature.
Il y a $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ classes d'équivalences.

Définition 0.2.5

On définit ainsi la signature d'une forme quadratique réelle.

0.2.1 Applications

1. Méthode de Gauss
2. Classification des coniques et des quadriques.