# Ai 18/19

Rang

**Exercice 1** :
Rappeler la définition de l'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs $e_1, e_2, ..., e_n$. Montrer que cet espace vectoriel est le plus petit espace vectoriel au sens de l'inclusion qui contienne la famille de vecteurs, c'est à dire que tout espace vectoriel qui contient cette famille contient aussi l'espace vectoriel engendré par cette famille.

**Exercice 2** :

Déterminer le nombre de solutions du système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 2a \\ x + my + z = a \\ 3x + y - mz = a \end{cases}$$

**Exercice 3** :
Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $k$ quatre rels. Rle système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y - z = \alpha \\ y + 3z = \beta = a \\ 2x + ky + 2z = \gamma \end{cases}$$

**Exercice 4** :
Quel est le rang de la famille formé de $sin(x), sin^2(x)$ et $sin^3(x)$ ?

**Exercice 5** :
Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ sur un corps $K$ fini à $p$ éléments.

1. $Card(E)$ ?
2. Soit $r \in [\![1, n]\!]$. Quel est le cardinal de l'espace engendré par une famille libre possédant $r$ éléments ?
3. $Card(GL(E))$ ?

**Exercice 6** Quel est le rang dans $\mathbb{R}$ considéré comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de la famille :

$$\begin{array}{llllll}
a_1 = & 2e_1+ & 3e_2- & 3e_3+ & 4e_4+ & 2e_5 \\
a_2 = & 3e_1+ & 6e_2- & 2e_3+ & 7e_4+ & 9e_5 \\
a_3 = & 7e_1+ & 18e_2- & 2e_3+ & 7e_4+ & 7e_5 \\
a_4 = & 2e_1+ & 4e_2- & 3e_3+ & 3e_4+ & e_5 \\
a_5 = & 9e_1+ & 22e_2- & 5e_3+ & 10e_4+ & 8e_5 \\
a_6 = & 4e_1+ & 6e_2- & 6e_3+ & 4e_4+ & 2e_5 \\
a_7 = & 4e_1+ & 7e_2- & 6e_3+ & 7e_4+ & 3e_5
\end{array}$$

**Exercice 7** :
Soit $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie $n$, $f \in \mathcal{L}_K(E)$. Montrer que

1. $rg(f^2) = rg(f) - dim(Ker(f) \cap Im(f))$
2. $dim[f^{-1}(Im(f^2))] = dim(Ker(f)) + rg(f^2)$

**Exercice 8** :
Déterminer les rangs des sytèmes suivants de $\mathbb{R}^n$.

$$S_1 := \{a_i = (\alpha_{i,1}; \alpha_{i,2}; ...; \alpha_{i,n}) \text{ avec } \alpha_{i,j} = 1 + (k-1)\delta_{i,j}, 1 \leq i \leq n\} k \in \mathbb{R}.$$

$$S_2 := \{a_i = (\alpha_{i,1}; \alpha_{i,2}; ...; \alpha_{i,n}) \text{ avec } \alpha_{i,j} = n(j-1) + ki, 1 \leq i \leq n\} k \in \mathbb{R}.$$

$$S_3 := \{a_1 = (1,1,0,...,0); a_2 = (0,1,1,0,...,0); ...; a_{n-1} = (0,...,0,1,1); a_n = (1,0,...,0,1)\}$$

**Exercice 9** :

Soit l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^6$ : $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Déterminer une base du noyau, son rang et une base de l'image.

**Exercice 10** :
On pose

$$i = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right), j = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right), k = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Calculer $i^2, j^2, k^2, ki, -ik, jk, -kj, ij, -ji$.
Soit $q = a + bi + cj + dk$, où on note $I_4 = 1$, et soit $\bar{q} = a - bi - cj - dk$. Calculer $N(q) = q\bar{q}$.
Où veut-on en venir ? Conclure.

**Exercice 11** :
Montrer le théorème suivant :
**Théorème de Décomposition des noyaux**:
Soit $P \in K[X]$ un polynôme tel que $P = P_1P_2...P_s$, où les $P_i$ sont premiers entre eux deux à deux.Alors

$$KerP(f) = KerP_1(f) \oplus KerP_2(f) \oplus ... \oplus KerP_s(f).$$

**Exercice 12** :
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer qu'il existe un unique entier $r$ tel que

   $$\{0\} = Kerf^0 \subsetneq Kerf \subsetneq ... \subsetneq Kerf^r = Kerf^{r+1} = Kerf^{r+2} = ... = Kerf^q = .... \quad (1)$$

   Cet entier $r$ s'appelle <u>l'indice de $f$</u>.

   Montrer que c'est le plus petit entier naturel tel que $Kerf^r = Kerf^{r+1}$.

2. Calculer l'indice de $f$ lorsque $f$ est nilpotente.

3. Montrer que $E = Kerf^r \oplus Imf^r$..

   En déduire une assertion équivalente à (1) pour les $Im$.