Le rang

Toutes les notions d'algèbre linéaire sont censées être connues !

Algèbre linéaire

La notion de base est contenue dans la définition :

Le rang d'une famille de vecteurs est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs.

Le lien avec la notion de dimension est évident.

On se donne une famille de vecteur de rang *r*. Alors, il suffit de trouver une sous-famille libre de *r* vecteurs, pour qu'elle soit une base du sous-espace engendré.
La famille initiale est génératrice du sous-espace engendré : si on trouve par ailleurs une sous-famille libre de *r* vecteurs, c'est une base.

En dehors des exercices d'application du cours, on utilise al notion de rang dans l'étude des arcs géométriques/ courbes paramétrées : études locales des pointsn notamment pour les points de rebroussements.
Ex : on considère un arc de paramétrisation (f,I), et un en point M, on suppose que le vecteur dérivé est nul (point non régulier). Alors l'étude des sous-espaces vectoriels successifs (donnés par les vecteurs dérivés) permet de déterminer la nature du point.

Exemples d'exercice :
Soient E et F deux espaces vectoriels sur K de dimension finie.
On considère f et g deux morphismes de E vers F.
Montrer que

$$rg(f+g)=rg(f)+rg(g)$$

si et seulement si

$$Im(f) \cap Im(g) = \{0\} \text{ et } Ker(f) + Ker(g) = E.$$

Rang d'une matrice :

C'est le rang de la famille de vecteurs composées des colonnes, ou de celle des vecteurs composés des lignes. On trouve le même nombre.
C'est aussi la taille de la plus grande matrice carrée inversible que l'on peut extraire de la matrice initiale.

Pour des raisons de commodités d'écriture, je ne parlerai plus que de matrice par la suite, dès que je peux.

Quelques propriétés :

- ✔ A est inversible si et seulement si son rang est sa taille
- ✔ Le rang est invariant par la transposition

Rang d'une application linéaire :

Le rang de f est la dimension de l'image de f.
Il fait partie des invariants fondamentaux en dimension finie avec le déterminant et la trace.
Attention cependant, le rang existe pour toutes les matrices et pas simplement les matrices carrés (endomorphismes).

On a ici le théorème du rang :

> Si f est un morphisme de E de dimension n vers F de dimension p,
> $$\mathrm{rg}\,(f) + \dim \mathrm{Ker}(f) = \dim E$$

Attention, c'est bien la dimension de l'espace de départ.

<u>Exemples d'exercice</u> :
Soient E et F deux espaces vectoriels sur K de dimension finie.
On considère f et g deux morphismes de E vers F.
Montrer que

$$rg(f+g)=rg(f)+rg(g)$$
si et seulement si
$$Im(f) \cap Im(g) = \{0\} \text{ et } Ker(f) + Ker(g) = E.$$

Quelques propriétés :

- ✔ Le rang de f est inférieur à la dimension de E (th du rang)
- ✔ Le rang de f est inférieur à la dimension de F (application)
- ✔ Rg (f) = dim E est équivalent à f injective qui est aussi équivalent à Ker (f) = {0}
- ✔ Rg (f) = dim F est équivalent au fait que f soit surjective.

<u>Conséquences :</u>
Montrer que si u est un endomorphisme de E, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. u est un automorphisme
2. u est injectif
3. u est surjectif
4. u est de rang n
5. il existe un automorphisme v de E tel que $v \circ u = Id$
6. il existe un automorphisme w de E tel que $u \circ w = Id$

Théorèmes :

> On considère une matrice A qui représente f. Alors rg (A) = rg (f).

Bref toutes les matrices semblables ont le même rang.

Le rang de f est la somme des dimensions des sous-espaces caractéristiques associés aux valeurs propres non nulles.

Sans revenir sur la définition des sous-espaces caractéristiques,

<u>Exercice</u> :
Exprimer le rang d'un projecteur en fonction de sa trace.
Quels renseignements avez vous sur le rang d'une symétrie ? D'un endomorphisme nilpotent ? Idempotent ?
Sur les morphismes de référence ?

Applications : résolution de toutes les formes de système linéaire (y compris les suites récurrentes linéaires ou les équations différentielles), Pivot de Gauss.

Algèbre bilinéaire :

On définira le rang d'une forme quadratique ou hermitienne comme le rang de la matrice de sa forme polaire.
On a le théorème suivant.
Si (p,n) est la signature d'une forme quadratique q, alors **rg (q) = p + n**.

Si on considère dans $\mathbb{R}^3$ la forme quadratique définie dans la base canonique par $3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$.
Calculer son rang.

Enfin dernier théorème fondamental:

Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.