Anneaux, idéaux, polynômes.

Séance du 30 novembre 2018

Ce sujet aborde des points classiques du cours sur les anneaux et les idéaux, accorde une attention particulière aux idéaux de $K[X,Y]$, puis propose l'étude d'un anneau de la forme $\mathbb{Z}[\omega]$, une famille bien connue. On en profite pour traiter un point du programme mis en évidence par le jury dans le dernier document mis en ligne (ce point est surligné en jaune !).

3.2 Anneaux et corps

Définition (les anneaux sont supposés unitaires par définition). Formule du binôme pour des éléments commutables. Idéaux d'un anneau commutatif. Anneaux quotients. Anneaux commutatifs intègres. Morphismes d'anneaux. Isomorphisme entre $\mathrm{Im}(f)$ et $A/\mathrm{Ker}(f)$ pour f morphisme d'anneaux de A dans A'.
Anneaux principaux. Exemple des entiers de Gauss, applications.
Sous-corps. Corps premier. Caractéristique d'un corps. Corps des fractions d'un anneau intègre.

Dans tout le problème les corps considérés sont des corps commutatifs, et les anneaux considérés sont des anneaux commutatifs unitaires.

On utilisera des notations et définitions assez classiques, à savoir :

- une partie I d'un anneau A est appelée un idéal de A si c'est un sous-groupe additif de A tel que
$$\forall i \in I,\ \forall a \in A,\ ai \in I$$
- si I et J sont deux idéaux de A on définit la somme de I et de J par
$$I + J = \{i + j \mid i \in I \text{ et } j \in J\}$$
- si a est un élément d'un anneau A on note (a) l'idéal engendré par a, soit $(a) = \{ax \mid x \in A\}$
- on dit qu'un idéal de A est principal s'il est engendré par un élément de A
- on dit qu'un anneau A est principal s'il est intègre et si tous ses idéaux sont principaux
- on dit qu'un idéal I d'un anneau A est maximal si $I \neq A$ et si les seuls idéaux de A contenant I sont I et A
- on dit qu'un idéal I d'un anneau A est premier si $I \neq A$ et si
$$\forall (x,y) \in A^2,\ xy \in I \implies x \in I \text{ ou } y \in I$$

Partie I - Généralités sur les idéaux

I.1. Montrer que la somme de deux idéaux est un idéal.

I.2. Montrer qu'une partie d'un anneau A est un idéal si et seulement si c'est le noyau d'un morphisme d'anneaux.

I.3. Le théorème de factorisation mis en avant dans le nouveau programme.

I.3.a. On considère deux anneaux A et B et un morphisme d'anneaux $f : A \to B$. Montrer que $Im(f)$ est isomorphe au quotient $A/Ker(f)$.

I.3.b. Montrer que le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ est isomorphe au quotient $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$.

I.3.c. On suppose que m et n sont deux entiers premiers entre eux.
Montrer rapidement que les anneaux $\frac{\mathbb{Z}}{mn\mathbb{Z}}$ et $\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ sont isomorphes.

I.4. Idéaux premiers, maximaux et quotients. Dans cette question on considère un idéal I d'un anneau A.

I.4.a. Montrer que I est premier si et seulement si A/I est intègre.

I.4.b. Montrer que I est principal si et seulement si A/I est un corps.

I.4.c. Montrer que tout idéal principal est premier. Que dire de la réciproque ?

Partie II - Anneaux euclidiens

On rappelle que l'on dit qu'un anneau A est euclidien si A est intègre et si on peut munir A d'un stathme euclidien, c'est-à-dire d'une application $\phi : A \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ telle que

i) pour tout $a \in A \setminus \{0\}$ et $b \in A \setminus \{0\}$ tels que $a|b$ on a $\phi(a) \leq \phi(b)$ et

ii) pour tout $a \in A$ et $b \in A \setminus \{0\}$ il existe deux éléments q et r dans A tels que $a = bq + r$ avec $r = 0$ ou $\phi(r) < \phi(b)$.

II.1. Montrer que tout anneau euclidien est principal.

II.2. En déduire quels sont les idéaux de $\mathbb{Z}$, puis quels sont ses idéaux premiers et maximaux.

II.3. L'exemple fondamental de l'anneau des polynômes $A[X]$

II.3.a. Montrer que pour tout corps K, l'anneau des polynômes à une indéterminée $K[X]$ est principal.

II.3.b. L'anneau $\mathbb{Z}[X]$ est-il principal ?

II.3.c. Montrer que pour tout anneau A, l'anneau $A[X]$ est principal si et seulement si A est un corps.

II.4. Montrer que l'anneau $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est principal.

II.5. On considère un espace vectoriel E de dimension finie sur un corps K, et u un endomorphisme non nul de E. (Redé)Montrer que l'ensemble des polynômes $P \in K[X]$ tels que $P(u) = 0$ est un idéal, puis qu'il existe un unique polynôme unitaire qui engendre cet idéal.

Partie III - Idéaux de K[X,Y]

L'objectif de cette partie est de démontrer le résultat suivant.

Théorème 1 : Si K est un corps infini, alors les idéaux premiers de $K[X,Y]$ sont (0), les idéaux principaux (P) où $P \in K[X,Y]$ est un polynôme irréductible et les idéaux maximaux.

On souhaite alors décrire les idéaux maximaux dans le cas où K est algébriquement clos.

Théorème 2 : Si K est un corps algébriquement clos, les idéaux maximaux de $K[X,Y]$ sont les idéaux $(X-a, Y-b)$ où a et b sont des éléments de K.

On considère à partir de maintenant un corps K infini.

III.1. L'anneau des polynômes à deux indéterminés $K[X,Y]$ est-il principal ?

III.2. Montrer qu'un idéal principal de $K[X,Y]$ n'est pas maximal.

III.3. Montrer que si F et P sont éléments non nuls de $K[X,Y]$, alors il existe Q et R de $K[X,Y]$ et $a \in K[X]$ tel que $a(X)F(X,Y) = P(X,Y)Q(X,Y) + R(X,Y)$ et $\deg_Y(R) < \deg_Y(P)$.

III.4. Montrer que si $\mathcal{M}$ est un idéal premier non principal de $K[X,Y]$ alors il existe un polynôme $P(X) \in K[X] \cap \mathcal{M}$ qui soit irréductible.

III.5. Prouver le Théorème 1.

III.6. Prouver le Théorème 2.

III.7. Le résultat du Théorème 2 subsiste-t-il si K n'est plus supposé algébriquement clos ?

Partie IV - L'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$

On note $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ l'ensemble des nombres complexes $a + bi\sqrt{2}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$.
Pour tout nombre complexe z on pose $N(z) = z\overline{z} = |z|^2$. Pour tous z et z' de $\mathbb{C}$ on a $N(zz') = N(z)N(z')$.

IV.1. Démontrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ commutatif et intègre.

IV.2. Elèments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.

IV.2.a. Vérifier que pour tout élément α de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ le nombre $N(\alpha)$ est entier.

IV.2.b. Démontrer que les élèments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ sont les éléments α tels que $N(\alpha) = 1$.

IV.2.c. Déterminer les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.

IV.3. Etant donnés deux éléments α et β de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$, avec $\beta \neq 0$, démontrer qu'il existe γ et δ de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ tels que

$$\alpha = \beta\gamma + \delta \text{ et } |\delta| < |\beta|\,.$$

[On pourra prouver l'existence de $\gamma \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ tel que $\left|\gamma - \frac{\alpha}{\beta}\right| < 1$.]

IV.4. Démontrer que l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est principal.

IV.5. Déterminer les diviseurs irréductibles de 2 dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.

1 Indications à utiliser après une première recherche.

I.1. Il suffit de vérifier tranquillement la définition.

I.2. Une implication est facile.
Pour l'autre, on peut essayer de trouver un bon anneau B
et un bon morphisme $f : A \to B$
tel que f s'annule uniquement sur I...

I.3.b Appliquons ce qui précède !
(Au passage, remarquer que la question suppose que $\mathbb{C}$ est déjà construit...
...or on définit souvent $\mathbb{C}$ comme le quotient présenté...pas grave.)

I.3.c Pour une démonstration rapide, on a envie de considérer une application f qui à un entier x associe le couple $(\overline{x}, \overline{\overline{x}}) \in \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ constitué des deux classes.
On applique alors le théorème de factorisation et un argument de cardinalité.
A nouveau c'est un cas d'école : on peut se passer du théorème de factorisation
et expliciter la bijection réciproque.

II.1. Pour un idéal I donné, on peut considérer un élément b de $I \setminus \{0\}$ minimisant ϕ,
puis appliquer une *division euclidienne.*

II.2. Si on arrive à appliquer ce qui précède, on aura une information importante sur les idéaux de $\mathbb{Z}$.

II.3.b La question suivante peut vous aider à connaître la réponse...
Maintenant, pour une preuve, on peut essayer de construire un idéal à la main
qui ne soit pas principal.
Par exemple on peut partir d'un idéal engendré par deux élements bien choisi.

II.4 A partir de l'écriture unique d'un décimal non nul $x = n2^p5^q$ (préciser !)
on peut construire un ftasme.

III.1 On peut travailler au couteau suisse et considérer un idéal assez naturel...
...ou utiliser ce qui précède.

III.2 Par l'absurde : pour un idéal principal (P), on peut considérer
un idéal $I = (P, X - x)$ pour un bon choix de x.

III.3 On a envie d'appliquer une division euclidienne, mais attention :
si on applique l'énoncé classique les coefficients doivent être dans un corps.
Il s'agit donc de ruser...

III.4 Un point de départ possible : parmi les polynômes de $\mathcal{M}$
de degré minimal en Y, en choisir un de degré minimal en X,
puis par l'absurde supposer que $P = AB$.

III.5 S'il existe un tel polynôme irréductible $P(X)$ dans $\mathcal{M}$,
il existe également un polynôme irréductible $Q(Y)$. Bon.

Tournez la page SVP.

2 Sources.

$\diamond$ On trouvera les résultats de la partie **I** dans beaucoup de livres d'algèbre niveau L3/M1. Citons par exemple *Eléments de théorie des anneaux* de Josette Calais ou *Groupes, Algèbres et Géométrie* de Jean-Marie Arnaudiès et José Bertin.

$\diamond$ De même pour le début de la partie **II**.

$\diamond$ Le résultat du **II.4** attestant que $\mathbb{D}$ est principal se retrouve par exemple dans le livre *Oraux X-ENS Algèbre 1* de Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas. On le retrouve également dans le livre *Mathématiques pour l'agrégation* de Jean-Etienne Rombaldi. On y montre également que tout sous-anneau de $\mathbb{Q}$ est principal.

$\diamond$ Dans l'application du **II.5** tout le monde a reconnu l'important point de cours permettant de définir le polynôme minimal d'un endomorphisme.

$\diamond$ L'équivalence évoquée en **II.3.c** ($A[X]$ est principal si et seulement si A est un corps) est également très classique. C'est le Théorème 8.5 dans le livre *Mathématiques pour l'agrégation* de J-E Rombaldi. On le retrouve également dans le livre *Exercices de Mathématiques pour l'Agrégation* de S. Francinou et H. Gianella.

$\diamond$ La partie **III** sur les idéaux de $K[X, Y]$ suit de très près l'exercice 2.22 du livre *Exercices de Mathématiques pour l'Agrégation* de S. Francinou et H. Gianella.

$\diamond$ La partie **IV** est entièrement tirée du sujet de 2007 de la première épreuve d'agrégation interne. Si on souhaite plutôt travailler avec les entiers de Gauss, on trouvera une présentation de $\mathbb{Z}[i]$ agréable dans le livre *Algèbre fondamentale - Arithmétique* de George et Marie-Nicole Gras ou consulter *Algèbre pour l'agrégation interne* de Patrice Tauvel.