Constructions à la règle et au compas.

30 novembre 2018

Les transformations

.
Chaque construction devra être codée utilement. Les traits de construction seront en pointillés.
Les constructions devront être justifiées et les propriétés utilisées énoncées.
Le scénario de construction devra être rédigé soigneusement.

- ✔ Médiatrice de deux points
- ✔ Milieu d'un segment
- ✔ Perpendiculaire à une droite passant par un point donné
- ✔ Parallèle à une droite passant par un point donné

Rappeler l'ensemble des isométries du plan, en précisant les éléments caractéristiques.

Pour les transformations suivantes, indiquer comment placer M' l'image de M u point quelconque).
On précise entre () les données du problème)

- ✔ réflexion (axe (D))
- ✔ réflexion (A et son image A')
- ✔ translation (vecteur $\vec{AB}$)
- ✔ symétrie glissée (un axe (D) et un vecteur $\vec{AB}$ de cet axe)
- ✔ rotation (centre O, un point A et son image)
- ✔ rotation (centre O, un couple de demi-droites définissant un angle)
- ✔ rotation (A et son image A', B distinct de A et son image B')
- ✔ homothétie (centre , A et son image A')
- ✔ homothétie (A et son image A', B distinct de A et son image B').

Montrer que pour une similitude, la donnée d'un centre et d'un point A et son image n'est pas suffisante. Pour un point M, trouver les images possibles.

Inversion

On se place dans un plan euclidien.
On appelle inversion de pôle O et de module k non nul la transformation qui, à tout point M distinct de O, fait correspondre le point M' de la droite (OM) tel que

$$\overline{OM}\,\overline{OM'}=k$$

Cette transformation est **involutive**.

Si k est négatif, il n'y a pas de point invariant. Dans le cas contraire, il s'agit d'un cercle de centre O et de rayon $\sqrt{k}$.

De la relation $\overline{OM}\,\overline{OM'}=k=\overline{OP}\,\overline{OP'}$, on en déduit que si M et M' sont images , ainsi que P et P', alors **M, M', P et P' sont cocycliques**.

1)
Montrer que réciproquement, si M et M' sont images par une inversion de pôle O, et que P et P' vérifient :

- ✔ O, P et P' sont alignés
- ✔ $\overline{OM}\,\overline{OM'}=\overline{OP}\,\overline{OP'}$

alors P et P' sont inverses par la même inversion.

2)
On considère une inversion de pôle O qui transforme A en A'

a) Construire l'image d'une droite passant par O
b) Construire l'image d'une droite ne passant par O

3)
Construire l'image d'un cercle passant par O

4)
Rappeler ce qu'est la puissance d'un point par rapport à un cercle et en donner les principales propriétés.

5)
On considère un cercle (C) ne passant pas par O, M un point de ce cercle, M_1 le second point d'intersection de (OM) avec (C) et M' l'inverse de M.
Établir une relation entre $\overline{OM_1}$ et $\overline{OM'}$. On notera p la puissance de O par rapport au cercle (C).

6)
En déduire l'image de (C) par l'inversion et préciser la construction d'un inverse d'un point du cercle.

Nombres constructibles

Avec l'homothétie se pose la question suivante : que se passe-t-il si la donnée est le rapport, à savoir un nombre réel.

Cette question est la même que celle des nombres constructibles.
Nous n'allons pas montrer le théorème de Wantzel, mais on peut travailler sur le sujet.

Rappeler comment construire à la règle et au compas, les nombres étant donnés sous la forme de segment :

- ✔ la somme de deux nombres
- ✔ la différence de deux nombres
- ✔ la multiplication de deux nombres
- ✔ la division de deux nombres
- ✔ l'extraction d'une racine carré d'un nombre.

Figures géométriques constructibles

Construire les figures suivantes qui seront inscrites dans un cercle donné, qu'on supposera de rayon 1.

- ✔ un triangle équilatéral
- ✔ un carré
- ✔ un pentagone

Pour ce dernier, on prouvera tout, y compris comment trouver le nombre constructible.