Décompositions de Matrices (hors réduction)

27 septembre 2018

Notions à réviser :
Opérations élémentaires et matrices d'opérations élémentaires, algorithme de gauss pour inversion de matrice et résolution de système, methode d'orthonormalisation de schmidt, formes bilinéaires et quadratiques.
EXERCICE I (propriété au programme) :
a) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, montrer que dans la famille $(A + \frac{1}{k}I_n)_{k\in\mathbb{N}^*}$ toutes les matrices sont inversibles sauf un nombre fini d'entre elles.

b) En déduire que $Gl_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.

EXERCICE II (propriété au programme) :
Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $M_n(\mathbb{C})$

EXERCICE III (matrices d'opérations élémentaires)
1) Montrer que toute matrice de $Sl_n(\mathbb{R})$ est le produit de matrices de transvections et de matrices de permutation.
2) En déduire que $Sl_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

EXERCICE IV (décomposition LU)
1) a) écrire la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ comme produit de matrices d'opérations élémentaires (inverser A avec les lignes)
b) En déduire que A s'écrit comme produit d'une matrice L triangulaire inférieure dont la diagonale ne contient que des 1 et d'une matrice U triangulaire supérieure.
c) Montrer que l'écriture précédente est unique.
d) Retrouver directement les coeffs de L et U par résolution de l'equation $A = LU$ d'inconnues les coefs de L et U.
Chaque case de A donne une équation, la résolution peut se faire ligne après ligne (méthode de crout) ou sous matrices principale après sous matrice principale (méthode mixte)
e) Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'admet pas de décomposition de la forme LU et fabriquer une matrice de $M_3(\mathbb{R})$ qui n'en admet pas non plus.
f) 1) Montrer que toute matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont les mineurs principaux sont non nuls admet une décomposition LU.
f)2) Donner un exemple de matrice 2×2 ne vérifiant pas la condition précedente mais qui admet quand même une décomposition LU.

EXERCICE V (décomposition de Cholesky)
1) déterminer une matrice T triangulaire inférieure telle que $A = T^tT$ ou A est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 6 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$
2) a) Montrer que toute matrice réelle symétrique définie positive a des mineurs principaux strictement positifs (restreindre la forme bilinéaire).
b) en déduire (cf exo III) que toute matrice réelle symétrique définie positive admet une écriture sous la forme T^tT avec T triangulaire inférieure.
c) Montrer que, quitte à multiplier T par une matrice diagonale avec seulement des -1 et des 1 sur la diagonale on peut même supposer que tous les coefs diagonaux de T sont positifs.
3) Montrer que la décomposition d'une matrice réelle symétrique définie positive sous la forme T^tT avec T triangulaire inférieure à coefs diagonaux positifs est unique.

EXERCICE VI (décomposition QR par Gramm-Schmidt)
1) On travaille dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Soit S la famille de vecteurs dont la matrice en base canonique est $A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$ appliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à S et déterminer la matrice Q de la famille obtenue.
2) En déduire que $A = QR$ avec R une matrice triangulaire supérieure à coefs diagonaux positifs à déterminer.
3) Peut on généraliser ce qui précède à toute matrice inversible ?

EXERCICE VII (décomposition SO)
1)a) Montrer que l'ensemble $O(n)$ des matrices orthogonales d'ordre n est une partie compacte de $M_n(\mathbb{R})$.
b) Montrer que l'ensemble $S^+(n)$ des matrices symétriques positives d'ordre n est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.

2)a) montrer que $\forall M \in Gl_n(\mathbb{R}), M^tM$ est symétrique définie positive.
b) monter que pour toute matrice S' symétrique définie positive il existe une unique matrice S symétrique définie positive telle que $S^2 = S'$.
c) Soit $M \in Gl_n(\mathbb{R})$ et S symétrique définie positive telle que $S^2 = M^tM$.
Montrer que $S^{-1}M$ est orthogonale.
d) Montrer que toute matrice $M \in Gl_n(\mathbb{R})$ s'écrit de façon unique sous la forme SO avec S symétrique définie positive et O orthogonale.
e) Montrer que toute matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme SO avec S symétrique positive et O orthogonale.