DM d'agreg interne: "accroissements finis"

Nicolas ARNAUD, niarnaud@yahoo.fr

notations :
Dans tout ce devoir U désignera une partie ouverte connexe par arcs de $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique $< | >$ et de la norme euclidienne associée.
Sauf mention du contraire a et b désignent des réels tels que $a < b$.
De plus f désignera une application de U vers $\mathbb{R}^p$ différentiable sur U ; en un point M sa différentielle sera notée Df_M et dans le cas où $p = 1$ son gradient sera noté $gradf(M)$.
La norme triple de f est prise relativement aux normes euclidiennes de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$.
Etant donné deux points A et B de U et un arc $\Gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ tel que $\Gamma(a) = A$ et $\Gamma(b) = B$ on dira que Γ relie A à B ;
si de plus tous les points de l'arcs sont dans U on dira que l'arc est inclus dans U.
Pour un arc Γ de classe C^1 on appellera longueur de Γ la quantité $\displaystyle\int_a^b \|\Gamma'(t)\|\, dt$

1 PARTIE I : ce qu'il y a au programme de plus que les fonctions d'une variable réelle

Dans cette partie on se contentera d'utiliser les théorèmes des accroissements finis pour les fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles pour démontrer les versions « plusieurs variables », « à valeurs complexes »et « à valeurs vectorielles ».
Dans cette partie, sauf question 3)c), l'ouvert U est supposé convexe.
1)a) Soit $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable et M un réel tel que $\forall t \in [a, b], |g'(t)| \leq M$.
Redémontrer que $|g(b) - g(a)| \leq M(b - a)$.
(On pourra suivant les cas étudier $h(t) = Re(\dfrac{g(t) - g(a)}{g(b) - g(a)}))$

b) Montrer sur un exemple que l'égalité des accroissements finis

$$\exists c \in]a, b[, g(b) - g(a) = g'(c)(b - a)$$

est en générale fausse pour une fonction $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ dérivable.

2) Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable et M un réel tel que $\forall t \in [a, b], \|g'(t)\| \leq M$.
Démontrer que $\|g(b) - g(a)\| \leq M(b - a)$.

(On pourra suivant les cas étudier $h(t) = \dfrac{\langle g(t) - g(a) | g(b) - g(a)\rangle}{\|g(b) - g(a)\|}$)

3)a)Soit $A, B \in U$; posons $u = B - A$.

Montrer que la fonction $\varphi : [0,1] \to U$ définie par $\varphi(t) = f(A + tu)$ est bien définie, qu'elle est dérivable et que $\forall t \in [0,1], \varphi'(t) = Df_{A+tu}(u)$.

b) En déduire que si M est un réel tel que $|||Df||| \leq M$ alors on a
$\forall A, B \in U, \|f(B) - f(A)\| \leq M \|B - A\|$.
(C'est l'inégalité des accroissements finis à plusieurs variables).

c) Montrer sur un exemple que l'inégalité des accroissements finis à plusieurs variable devient fausse si on impose pas à U d'être convexe.

Aide : Pour $U = \mathbb{R}^2 - (\mathbb{R}^+ \times \{0\})$ on pourra étudier $f(x,y) = \left| \begin{array}{ll} x^2 & \text{si } x > 0 \text{ et } y > 0 \\ -x^2 & \text{si } x > 0 \text{ et } y < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$.

4)(une inégalité dans l'autre sens) On suppose ici que $n = p$, que D est un compact convexe inclus dans U que f est de classe C^1 sur U et qu'en tout point de U, Df est inversible.
On note S l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ de norme 1.

a) Montrer que il existe $m > 0$ tel que $\forall x \in D, \forall u \in S$ on a $\|Df_x(u)\| \geq m$.

b) En déduire qu'il existe $m > 0$ tel que $\forall A, B \in D, \|f(B) - f(A)\| \geq m \|B - A\|$

c) Donner un exemple montrant qu'en générale le b) devient faux si D n'est pas supposé compact.

2 PARTIE II : une distance sur U et une autre inégalité

Dans cette partie l'ouvert U n'est plus supposé convexe.

1) On considère deux points A et B de U et un arc $\Gamma : [a,b] \to U$ de classe C^0 qui relie A à B.

Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout point M de Γ, la boule ouverte de centre M de rayon ϵ est incluse dans U.

2) Montrer alors qu'il existe un arc φ de classe C^1 reliant A à B et inclus dans U.

On note $E(A,B)$ l'ensemble des longueurs des arcs C^1 inclus dans U et reliant A à B.

Montrer que $E(A,B)$ admet une borne inférieure. On la notera $d(A,B)$.

3) Montrer que la fonction $d : U \times U \to \mathbb{R}$ définie à la question précédente est une distance sur U.

4) Dans cette question on suppose que f est de classe C^1, que $p = 1$ et que M est un réel tel

que $\|gradf\| \leq M$.

Montrer que $\forall A, B \in U, |f(B) - f(A)| \leq M \times d(A, B)$.