Géométrie différentielle

Attention. La première partie du programme du CAPES ne concerne que les courbes paramétrées, mais dès que l'on attaque les propriétés métriques, ce sont celles des arcs géométriques dont l'étude est prévue.
Pour ces rappels, je vais introduire directement les arcs géométriques, éventuellement orientés.
Dans toute la suite, I désigne un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$: borné ou non, ouvert, fermé ou semi-ouvert.
On travaille dans $\mathbb{R}^2$, et on parle de courbes planes ou dans $\mathbb{R}^3$ et on parle de courbes gauches.
Puisque l'on travaille avec des fonctions vectorielles d'une seule variable, plutôt que de parler de différentiabilité, on parlera de dérivation, puisque les dérivées successives de la fonction en un point sont des vecteurs.

1 Généralités

1.1 Arcs géométriques

Définition 1.1

Soit $E := \mathbb{R}^n$ un EVN ($n = 2$ ou $n = 3$).
Une application **continue** *$f : I \longrightarrow E$ est appelé un chemin.*
Il est dit de classe C^k si f est de classe C^k, pour $k \in [\![0, +\infty]\!]$.
Il est dit compact si I est compact.
Il est dit ouvert (respectivement fermé) si I est ouvert (fermé).

En fait, vous connaissez souvent les chemins sous un autre nom : courbes paramétrées. Mais le terme chemin est plus imagé : c'est quelque chose que l'on parcourt, et cette notion de parcours est plus parlante pour la suite.
Si I est un intervalle avec une extrémité a, son image sera appelée extrémité du chemin.

Définition 1.2

Un chemin compact dont les deux extrémités coïncident est appelé un lacet.

Un chemin est forcément continu : on le trace sans lever le stylo.
On peut parler de chemin C^k par morceaux, si on peut subdiviser I en un nombre fini d'intervalle sur lesquels les restrictions de f sont de classe C^k.
Exemples :

- $f_1 : \begin{array}{rcl} [0, 2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \theta & \longmapsto & (cos\theta, sin\theta) \end{array}$.
- $f_2 : \begin{array}{rcl} [0, \pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \theta & \longmapsto & (cos2\theta, sin2\theta) \end{array}$.

- $f_3 : \begin{array}{ccc} [0, 2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \theta & \longmapsto & (cos2\theta, sin2\theta) \end{array}$.

Est-ce que ce sont les mêmes chemins ? La réponse est non. Soit leur intervalle de départ, soit leur expression est différente. Et pourtant, on sent bien que les deux premiers font plus que se ressembler.

Définition 1.3

> *Deux chemins $f : I \longrightarrow E$ et $g : J \longrightarrow E$ sont dit C^k-équivalents s'il existe θ un C^k-difféomorphisme de I dans J tel que*
>
> $$f = g \circ \theta.$$

Exercice 1 : montrer que f_1 et f_2 sont C^∞-équivalents.

Théorème 1.1

> *"C^k-équivalents" est une relation d'équivalence sur les chemins de classe C^k.*

Notons ici qu'il faut bien que cela soit des C^k-difféomorphismes, pour que cette relation binaire soit symétrique. Cela veut dire que $\theta : \begin{array}{ccc} [-1, 1] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$ ne convient pas pour $k \geqslant 1$.
En effet, sa bijection réciproque n'est pas dérivable en 0.
On dira que f et g sont appelés des paramètres et θ un changement de paramètres.

Définition 1.4

> - *On appelle arc géométrique de classe C^k une classe d'équivalence.*
> - *Un représentant de cette classe d'équivalence est appelé représentation paramétrique admissible ou paramétrisation.*
> - *On remarque que toutes les paramétrisations ont la même image : l'ensemble des points de E image s'appelle le support de l'arc géométrique.*
> - *Les changements de paramètres qui font passer d'une paramétrisation à l'autre sont dits admissibles.*

Remarquons que si un chemin est compact, tous les chemins C^k-équivalents le sont (image d'un compact par une application continue). On parlera alors d'arc géométrique compact, et il aura alors deux extrémités, ou une dans le cas d'un lacet.
On trouve ici un premier piège : il est facile de confondre un chemin et son support. On verra plus loin que nous le ferons sous des conditions précises.
Exemples :

- un cercle n'est pas un arc géométrique ? Ce peut être en revanche le support d'un arc.

- L'arc dont un représentant est , $a \in \mathbb{R}^*$ étant fixé :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (at, ach(t)) \end{array}$$

  s'appelle une chainette. On peut remarquer que son support est le graphe de la fonction $ch(t)$ pour $a = 1$.
- L'arc dont un représentant est , $(a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$ étant fixé :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & (acos(t), asin(t), bt) \end{array}$$

  s'appelle une hélice circulaire.
- L'arc dont un représentant est , $a \in \mathbb{R}^*$ étant fixé :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \big(a(cos(t) - 2cos(\frac{t}{2})), a(sin(t) - 2sin(\frac{t}{2}))\big) \end{array}$$

  s'appelle une cardioïde.

Dans ces trois exemples, il s'agit d'arc C^∞.

Exercice 2 : trouver les support de f_1, f_2 et f_3.

Remarquons que pour l'instant, la question reste ouverte : est-ce que les chemins f_1 et f_3 sont les représentants d'une même arc géométrique C^∞ ?
En fait, on peut répondre tout de suite à cette question : on voit que f_1 est injective, mais pas f_3. Que veut dire d'ailleurs que f la paramétrisation est injective ?
Cela veut dire concrétement que le chemin ne passe pas deux fois par le même point.

Définition 1.5

On considère (γ) un arc, et M un point de son support. Soit f une paramétrisation de (γ).
On vient de remarquer qu'en fait le cardinal p de $f^{-1}(M) = \{t \in I, f(t) = M\}$ est indépendant de f.
Si ce cardinal est 1, on dit que M est un point simple de (γ).
Si ce cardinal est 2, on parlera de point double.
Sinon, on parlera de point d'ordre de multiplicité p.

Définition 1.6

On dira que (γ) est un arc simple si tous les points de son support sont simples.
On remarque qu'alors toutes ses paramétrisations sont injectives.

Exercice 3 : Chercher les points multiples de la cardioïde.

La définition qui suit est essentielle :

Définition 1.7

> *Soit (γ) un arc, et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une paramétrisation.*
> *On dira que f est une paramétrisation cartésienne de (γ) s'il existe un repère $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que la i-ème coordonnée de $f(t)$ soit t, pour tout t dans I.*

Remarquons tout de suite qu'une telle paramétrisation est injective. Ne sont donc concernés que les arcs simples.
Cependant, les paramétrisations cartésiennes sont très utiles pour les études locales des arcs. On va alors considérer des sous-arcs.

Définition 1.8

> *Soit (γ) un arc, et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un paramétrisation de cet arc.*
> *On dira que tout arc représenté par une restriction de f à un sous-intervalle J de I est un sous-arc de (γ).*

L'avantage est que pour une étude locale, on pourra se restreindre à l'étude d'un sous-arc simple de (γ).

Définition 1.9

> *Une paramétrisation est dite périodique si f l'est.*

Remarquons que le fait qu'une paramétrisation soit périodique n'implique pas que toutes les paramétrisations le soient : il suffit que le changement de paramètre ne soit pas affine !
On ne parlera donc pas d'arc périodique, ni de période de l'arc.
En revanche, pour étudier un arc dont un paramétrisation est périodique, il suffit de l'étudier sur une période, et le support sera parcouru autant de fois qu'il y a de périodes. Remarquons que sur une période, le chemin est un lacet.

1.2 Arcs orientés

Un changement de paramètre $\theta : I \longrightarrow J$ est une bijection d'intervalle : il est donc monotone, croissant ou décroissant.

Définition 1.10

> *Deux chemins sont dits positivement C^k-équivalents s'il existe un C^k-difféomorphisme croissant θ tel que $f = g \circ \theta$.*

C'est encore une relation d'équivalence, plus fine que C^k-équivalent.

Définition 1.11

> *Les classes d'équivalence sont appelés les arcs géométriques orientés ou classes d'orientation.*

Du fait que la relation d'équivalence est plus fine, les arcs géométriques orientés sont inclus dans les arcs géométriques.

Théorème 1.2

> *Tout arc géométrique est la réunion d'au plus deux classes d'orientation.*

Ce "au plus" peut paraitre surprenant ? Et pourtant
$$f : \begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (0, cos(t)) \end{array}.$$
Le segment qui relie O au point $A(0,1)$ est parcouru en un aller-retour. On voit bien intuitivement que même si on change l'orientation du chemin, on fait le même "chemin". Il n'y a qu'une seule classe d'orientation.

Proposition 1.3

> *Pour qu'un arc admette deux orientations, il suffit qu'il ait deux points simples. Un arc simple admet donc deux orientations.*

Cette notion d'orientation n'est pas fondamentale pour nous. On la reprendra quand on parlera de tangentes.

1.3 Arcs réguliers

Dans cette section, on suppose maintenant que l'on a plus de régularité : $k \geqslant 1$.
Considérons deux paramétrisations de classe C^k, $k \geqslant 1$ $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ d'un même arc (γ), et θ le changement de paramètres entre les deux : $\theta : I \longrightarrow J$, tel que $g = f \circ \theta$.
θ est C^1, et sa dérivée ne s'annulle donc pas sur I. De

$$g'(t) = f'(\theta(t)).\theta'(t)$$

on déduit $g'(t) \neq 0 \Longleftrightarrow f'(\theta(t)) \neq 0$.
On considère donc un point M de l'arc (du support), disons simple pour ne pas compliquer les choses. Alors si pour une paramétrisation, la dérivée de f en l'antécédent de ce point est nulle, c'est le cas pour toutes les paramétrisations.

Définition 1.12

Soit (γ) un arc de classe C^k, $k \geqslant 1$, et $f : I \longrightarrow E$ une paramétrisation.

1. *Un point simple $M_0 = f(t_0)$ est dit ordinaire ou simple si $f'(t_0) \neq 0$. Dans le cas contraire, il est dit singulier ou stationnaire.*
2. *L'arc est dit régulier si $\forall t \in I, f'(t) \neq 0$.*

Remarquons qu'un arc régulier n'est pas forcément constitué que de points réguliers : trouvez un contre-exemple.
Un arc régulier admet deux orientations (Preuve faisant intervenir un théorème de point fixe !).

2 Contact des arcs

Dans toute la suite, on va considérer des arcs simples et réguliers, quitte à n'étudier que des sous-arcs. On remarque donc qu'ils ne sont composés que de points réguliers !
Nous allons quantifier la qualité du contact entre deux arcs qui passent par un même point.

2.1 Définition et position du problème

Définition 2.13

Soient (γ_1) et (γ_2) deux arcs simples et réguliers de classe C^k passant par un même point M_0.
On dit que (γ_1) et (γ_2) ont un contact d'ordre supérieur ou égal à p s'il existe deux paramétrisations f_1 et f_2 de (γ_1) et (γ_2) telles que

1. *$f_1(0) = f_2(0) = M_0$,*
2. *$\forall r \in [\![1, p]\!], f_1^{(r)}(0) = f_2^{(r)}(0)$.*

Ce qui revient à dire qu'au voisinage de 0, $f_2(t) - f_1(t) = o(t^p)$.

Translations (et homothéties d'ailleurs) sont des C^∞-difféomorphismes : **on peut toujours se ramener à une étude du paramètre au voisinage de 0**.
Le problème de cette définition tient dans les termes : il existe deux paramétrisations. En fait, on comprend bien que deux paramétrisations quelconques n'ont pas la moindre raison de coïncider sur les p premières dérivées.
On est cependant assuré que si f_1 est une paramétrisation de (γ_1), et que le contact en M_0 est au moins d'ordre p, on peut trouver une paramétrisation pour (γ_2) qui vérifie les hypothèses de la définition.
Le deuxième problème sera de calculer l'ordre exact du contact.
Plus cet ordre est grand, plus le contact est étroit, et plus les deux arcs sont proches l'un de l'autre en ce point.

Remarquons que la relation binaire sur l'ensemble des arcs qui passent en M_0 "a un contact d'ordre supérieur ou égal à p" est une relation d'équivalence. Ici, ce qui nous intéresse est la transitivité.
Commençons par un résultat fondamental, que l'on peut rapprocher de la notion de point régulier.

Théorème 2.4

Soient deux arcs de classe C^k, $k \geqslant 1$, qui admettent f_1 et f_2 comme paramétrisation, et $M_0 = f_1(t_0) = f_2(u_0)$ comme point de contact.
Le contact est d'ordre supérieur ou égal à 1 si et seulement si $f_1'(t_0)$ est colinéaire à $f_2'(u_0)$.

On ne peut se borner à une égalité des vecteurs dérivés, puisque les homothéties sont des changements de paramètres admissibles, et qu'elles multiplient les vecteurs dérivés par une constante.

Cas de la paramétrisation cartésienne : dans le cas où les deux arcs admettent une paramétrisation cartésienne pour la même variable au point de contact, la valuation du Développement Limité de la différence des deux paramétrisations au point de contact donne l'ordre exact du contact. Ainsi, si $f(t) - g(t) = t^r\vec{u} + o(t^r)$, l'ordre de contact est $r - 1$.
On verra plus loin un autre type de paramétrisation qui permet de calculer l'ordre exact d'un contact : la paramétrisation normale.

Définition 2.14

Deux arcs dont l'ordre de contact en un point est supérieur ou égal à 1 sont dits tangents en ce point.

Deux arcs dont l'ordre de contact en un point est supérieur ou égal à 2 sont dits osculateurs en ce point.

Deux arcs dont l'ordre de contact en un point est supérieur ou égal à 3 sont dits surosculateurs en ce point.

Exercice 4 :
On se place dans $\mathbb{R}^2$, muni de la base canonique orthonormée.
Trouver les ordres de contact en l'origine pour

1. $(\gamma_1) : x = t; y = sin(t); t \in \mathbb{R}$, et
   $(\gamma_2) : x = t, y = t + \lambda t^3; t \in \mathbb{R}$.
   On discutera en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. $(\gamma_1) : x = \frac{1}{2R}t^2; y = t; t \in \mathbb{R}$, et
   (γ_2) : le cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 2Rx = 0$, parcouru une fois.

2.2 Sous-espaces fondamentaux

Voici maintenant le théorème fondamental pour l'étude local d'un chemin.

Théorème 2.5

> *Soit (γ) un arc simple de classe C^k, f une paramétrisation de (γ) et $M_0 = f(t_0)$ un point du support.*
> *Alors, pour chaque $p \in [\![1, k]\!]$, l'espace vectoriel engendré par $f'(t_0), \ldots, f^{(p)}(t_0)$ est indépendant de f, et s'appelle le p-ème sous-espace fondamental de (γ) au point M_0.*

Exercice 5 :
Que se passe-t-il pour $p = 1$?

Exercice 6 :
Si le point M_0 est régulier, on considère la droite (D) de paramétrisation $t \longmapsto M_0+(t-t_0)f'(t_0)$.
Montrer que le contact entre (γ) et (D) est supérieur ou égal à 1.
On identifie ici l'arc qui est la droite (D) parcourue une fois, et son support.

Définition 2.15

> *Cette droite (D) est appelée tangente à (γ) en M_0.*
> *Si l'arc est orienté, on parlera de tangente orientée.*

Comme toujours, l'ordre du contact est important.
Si $Vect\{f'(t_0), f''(t_o)\} \neq Vect\{f'(t_o)\}$, alors le contact est 1.
Sinon, cela veut dire que $f''(t_0) \in Vect\{f'(t_o)\}$.

Définition 2.16

> *Si $f''(t_0) \in Vect\{f'(t_o)\}$, ce qui veut dire que le contact de l'arc avec sa tangente est d'ordre au moins 2, on dit que le point M_0 est un point d'inflexion.*

Attention, il s'agit ici d'un point d'inflexion dans le cadre des points réguliers. On en trouvera d'autres dans le cadre des points stationnaires.
cela veut dire dans les fait que l'on peut trouver une paramétrisation g de (γ) telle que $g(t_0) = M_0$, $g'(t_0) = f'(t_0)$, et $g''(t_0) = 0$.

Définition 2.17

> *Si M_0 est un point régulier, sans être un point d'inflexion, $Vect\{f'(t_0), f''(t_o)\}$ est de dimension 2.*
> *La variété affine, ayant ce plan pour direction, et passant par le point M_0 est alors appelé plan osculateur de (γ) en M_0.*
> *De plus, si $f^{(3)}(t_0) \in Vect\{f'(t_0), f''(t_o)\}$, ce plan sera dit sur-osculateur.*

En fait, on peut considérer ce plan comme une surface : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & M_0 + xf'(t_0) + yf''(t_0) \end{array}$.

On considère alors, en prolongeant la notion, l'ordre de contact entre cette surface et l'arc (γ).

Exercice 7 :
Soit (γ) défini par $x = t$, $y = t^3$, $z = t^4$, $t \in \mathbb{R}$.
Donner la nature du point O.

Exercice 8 :
Soit (γ) l'hélice circulaire $(acos(t), asin(t), bt), t \in \mathbb{R}$, avec $ab \neq 0$.
Montrer que (γ) admet une tangente en tout point, ainsi qu'un plan osculateur, et donner en une équation cartésienne.

Nous disposons maintenant de presque tous les outils pour faire l'étude d'un arc géométrique. Remarquons tout de suite, que pour une étude locale, nous avons besoin d'un arc simple, et le mieux serait de disposer d'une paramétrisation cartésienne. C'est le sens du théorème qui suit :

Théorème 2.6

Si (γ) est un arc de classe C^k, $k \geqslant 1$ défini par une paramétrisation $f : I \longrightarrow E$, et soit $t_o \in I$ tel que $f'(t_0) \neq 0$.
Pour tout repère affine, il existe un intervalle ouvert J contenant t_0 tel que l'une au moins de ses coordonnées soit un paramètre admissible sur le sous-arc (γ_1) de (γ) défini à partir de J : (γ_1) est un sous-arc simple et régulier.

Enfin, ne peut-on avoir plus de renseignements en prenant l'image d'un arc par une transformation géométrique ?
La réponse est oui : on pourra, par exemple, en considérant l'ellipse parcourue une fois comme l'image du cercle parcouru une fois par une affinité orthogonale, obtenir de précieux renseignements.

3 Invariance d'un contact dans un difféomorphisme

Proposition 3.7

Soient (γ) et (δ) deux arcs de classe C^k $(k \geqslant 1)$ simples et réguliers ayant en M_0 un contact d'ordre supérieur ou égal à p. On notera f et g une paramétrisation de (γ) et (δ).
Soit $\Phi : U \longrightarrow V$ un C^k-difféomorphisme, où U est un ouvert contenant les supports de (γ) et (δ).
Alors les arcs $\Phi(\gamma)$ et $\Phi(\delta)$, définis respectivement par les paramétrisations $\phi \circ f$ et $\Phi \circ g$ ont au point $N_0 := \Phi(M_0)$ un contact d'ordre supérieur ou égal à p.
Si le contact est exactement d'ordre p, celui de $\Phi(\gamma)$ et $\Phi(\delta)$ aussi.

4 Etude locale et branches infinies

4.1 Etude au voisinage d'un point régulier

Quitte à faire une translation, on peut supposer $M_0 = f(0)$.
On suppose qu'il existe $q \geqslant 2$, tel que $f'(0)$ et $f^{(q)}(0)$ soient indépendants et on désigne par p le plus petit de ces entiers q.
Le développement limité de f au voisinage de 0 donne

$$\begin{aligned} f(t) &= f(0) + tf'(0) + \frac{t^2}{2}f''(0) + \ldots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}f^{(p-1)}(o) + \frac{t^p}{p!}f^{(p)}(0) + o(t^p) \\ &= f(0) + \left(t + t^2 P(t)\right) f'(0) + \frac{t^p}{p!}f^{(p)}(0) + o(t^p) \end{aligned}$$

où $P(t)$ est un polynôme.
Remarquons que si $p = 2$, $P(t) = 0$.
On se place dans le repère affine $(f(0), f'(0), \frac{1}{p!}f^{(p)}(0))$. Alors pour $t \in I$, on trouve

$$X = t + o(t) \quad Y = t^p + o(t^p)$$

On se trouve dans le cas où X est un paramètre admissible sur un voisinage de $M_0 = f(0)$. Et posant (δ) :

$$X = X \quad Y = X^p.$$

Donc (γ) et (δ) ont un contact d'ordre supérieur ou égal à p au voisinage de M_0.

1. $p = 2$.
   C'est le cas ordinaire. La parabole $Y = X^2$ (considérée comme arc géométrique) est osculatrice à (γ) en M_0. Attention cependant, il s'agit ici d'une équation cartésienne dans le repère $(f(0), f'(0), \frac{1}{2}f''(0))$.
   Remarquons donc, grâce à cette parabole, que le support de (γ) est le support d'une fonction convexe au voisinage de M_0. Précisons bien que c'est le graphe d'une fonction convexe dans le repère considéré.
2. p impair.
   Dans ce cas précis, $Y(X)$ est du signe de X au voisinage de M_0. Nous avons donc affaire à un point d'inflexion, et le support de (γ) traverse la tangente.
3. $p \geqslant 4$ et p pair.
   Cette fois ci, au voisinage de M_0, $Y(X)$ garde un signe positif. On dit alors qu 'il s'agit d'un point d'inflexion et que (γ) présente un méplat en M_0.

Exercice 9 :
Tracer les schémas correspondant à ces différentes situations.

4.2 Etude au voisinage d'un point stationnaire

On continue à placer notre étude au voisinage de $t = 0$, et on suppose ici que $f'(0) = 0$.
Nous allons dans un premier temps définir une notion de tangente généralisée à l'arc en $f(0)$.
On introduit p le premier entier naturel non nul, et donc différent de 1, tel que $f^{(p)}(0) \neq 0$. On a donc

$$f(t) = f(0) + \frac{t^p}{p!}f^{(p)}(0) + o(t^p)$$

On introduit (D) la droite passant par $M_0 = f(0)$, de vecteur directeur $f^{(p)}(0)$. La théorie du contact ne s'applique pas pour cette droite, même si on imagine bien que cette droite et le support de l'arc sont "proches"'.
On appellera cette droite la tangente généralisée de (γ) au point M_0.
Regardons sur un exemple ses propriétés :

Exercice 10 :

1. On considère un arc simple et régulier (δ) défini par $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t, f(t)) \end{array}$
   (a) Ecrire l'equation de la tangente (D) à (δ) en $t = 0$.
   (b) On considère $M(t, f(t))$ un point du support de (γ). Exprimer la distance de M à (D).
   (c) Comparer grâce à un équivalent au voisinage de 0 $d(g(0), M)$ et $d(M, (D))$.
2. On considère (γ) défini par $h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t^2, t^3) \end{array}$.
   (a) Trouver la tangente généralisée (D') de (γ) en $h(0)$.
   (b) Pour un point M du support de (γ), calculer sa distance à cette tangente.
   (c) Comparer grâce à un équivalent au voisinage de 0 $d(h(0), M)$ et $d(M, (D'))$.
3. Que peut-on dire de ces deux résultats ?

Soit (γ) un arc défini par f, tel que le point $f(0)$ soit stationnaire.
On pose, en n'oubliant pas d'étudier leur existence éventuelle :

$$\begin{array}{rcl} p & = & Min\{k \in \mathbb{N}^* / f^{(k)}(0) \neq 0\} \\ q & = & Min\{k \in \mathbb{N}^* / f^{(k)}(0) \text{ indépendant de } f^{(p)}(0)\} \end{array}$$

Remarquons donc que $p \geqslant 2$.
La même logique que précédemment nous conduit à

$$f(t) = f(0) + \frac{t^p}{p!}\,(1 + tP(t))\, f^{(p)}(0) + \frac{t^q}{q!} f^{(q)}(0) + o(t^q).$$

Commençons par remarquer que pour t assez proche de 0, $f(t)$ est un point régulier de (γ).
On se place alors dans le repère $(f(0), \frac{1}{p!} f^{(p)}(0), \frac{1}{q!} f^{(q)}(0))$. Alors on a

$$\left\{ \begin{array}{l} X(t) = t^p + o(t^p) \\ Y(t) = t^q + o(t^q) \end{array} \right.$$

Exercice 11 :
Etudier les quatre cas, et tracer les schémas correspondant (p pair ou impair, q pair ou impair).
On trouvera une disposition en méplat, une disposition d'inflexion,
un rebroussement de première espèce (traversée de la tangente),
et un rebroussement de deuxième espèce.

4.3 Branches infinies des arcs plans

Soit I un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$, $t_0 \in I$ et $f : I \backslash \{t_0\} \longrightarrow E$ une application injective de classe C^∞. Selon que t_0 est une extrémité ou non de I, f définit un ou deux arcs plans. Nous parlerons quand même de l'arc défini par f.
Nous pouvons toujours nous ramener au cas $t_0 = 0$, soit par une translation ($t_0 \in \mathbb{R}$), soit par $x \longmapsto 1/x$ (sinon).

Définition 4.18

Soit $X(t), Y(t)$ les coordonnées de $f(t)$ dans un repère. On dit que (γ) présente une branche infinie pour $t = 0$ si

$$\lim_{t \longrightarrow 0} (|X(t)| + |Y(t)|) = +\infty;$$

On remarquera que cette condition est indépendante du repère considéré, et reste invariante par tout changement de paramètre.
Nous faisons désormais les hypothèses suivantes :

- 0 est intérieur à I
- il existe un entier $m > 0$ tel que $t \longmapsto t^m f(t)$ se prolonge en une fonction C^∞ sur I.

Nous désignerons par p le plus petit entier naturel non nul vérifiant cette condition, et par g le prolongement de $t^p f(t)$. Alors, pour tout entier $n > 0$, on a

$$g(t) = g(0) + tg'(0) + \ldots ‘ \frac{t^{p+n}}{(p+n)!} g^{(p+n)}(0) + o(t^{p+n}).$$

On pose, pour tout $j \geqslant -p$,

$$A_j := \frac{1}{(p+j)!} g^{(p+j)}(0),$$

et on obtient

$$f(t) = \sum_{j=-p}^{n} t^j A_j + o(t^n). \tag{1}$$

Par hypothèse, on a $g(0) \neq 0$, donc $A_{-p} \neq 0$.

Définition 4.19

La direction définie par le vecteur A_{-p} est appelée direction asymptotique relative à la valeur 0 du paramètre.

Nous allons maintenant exploiter ce développement asymptotique de f, suivant le fait que le prochain entier après $-p$ pour lequel A_r est indépendant de A_{-p} est positif ou strictement négatif.
Remarquons tout de suite que le rôle joué par A_0 est particulier. Il n'a pas de monôme en t en facteur : il jouera donc le rôle de l'origine, en posant $O := A_0$.

1. Il existe un entier $r > 0$ tel que A_{-r} et A_{-p} soient indépendants.
   On appelle q le plus grand de ces entiers r. Dans un repère d'origine quelconque et de vecteurs A_{-p} et A_{-r}, les coordonnées de $f(t)$ sont donc de la forme
   $$X(t) = \frac{1}{t^p}(1 + o(t)) \quad Y(t) = \frac{1}{t^q}(1 + o(t)).$$
   Autrement X et Y ont toutes les deux une limite inifinie, dont le signe dépend des parités de p et q.

   Définition 4.20

   > *On dit que (γ) se compose, au voisinage de $t = 0$,*
   > *de deux branches paraboliques de direction asymptotique Ox.*

   Attention, pour avoir la disposition des branches paraboliques, cela ne pose de difficultés que si p et q sont tous les deux pairs, ce qui nécessite une étude complémentaire.
   Enfin, si 0 n'est pas intérieur à I, cette même étude marche encore, en adaptant les résultats.
2. Dès que $r > 0$, A_{-r} est colinéaire à A_{-p}, et il existe un entier $s > 0$ tel que A_s soit indépendant de A_{-p}.
   Comme précédemment, on note q le plus petit entier non nul s vérifiant cette condition.
   On se place dans le repère $(A_0 = O, A_{-p}, A_q)$. Alors, les coordonnées $X(t), Y(t)$ de $f(t)$ dans ce repère vérifient
   $$X(t) = \frac{1}{t^p}(1 + o(t)) \quad Y(t) = t^q(1 + o(t)).$$
   Seul $X(t)$ tend maintenant vers l'infini, lorsque $Y(t)$ tend vers 0.

   Définition 4.21

   > *On dit que la droite OX est un asymptote.*

   La position relative de (γ) par rapport à OX dépend de la parité de p et q.

   Exercice 12 :
   Suivant les parités de p et q faites un schéma pour retrouver les quatre configurations possibles (rebroussement première et seconde espèce, disposition d'inflexion, et disposition ordinaire).
3. On suppose maintenant que tous les A_r connus sont colinéaires à A_{-p}, pour $r \neq 0$.
   Dans ce cadre, la droite (A_0, A_{-p}) est toujours asymptote à la courbe, mais nous ne disposons pas de renseignements sur la position de l'arc par rapport à la courbe.

Exercice 13 :
Etudier les branches infinies pour les chemins suivants :

1. $x = \frac{1}{sint}, y = \frac{cost}{sint}$ au voisinage de $t = 0$,
2. $x = \frac{1}{sint}, y = \frac{1}{t - sint}$ au voisinage de $t = 0$,
3. $x = t + t^2$, $y = t + t^3$ lorsque t tend vers $\pm\infty$,
4. $x = ch(t), y = tch(t)$ lorsque t tend vers $\pm\infty$,
5. $x = exp\left(t + \frac{1}{t}\right), y = exp\left(t - \frac{1}{t}\right)$ lorsque t tend vers $\pm\infty$,et au voisinage de 0.
6. $x = \frac{1}{t}sin\left(\frac{1}{t}\right)$, $y = \frac{1}{t}cos\left(\frac{1}{t}\right)$ au voisinage de $t = 0$.

On remarquera que le cas 5 ne peut pas se traiter avec l'étude précédente. On peut cependant utiliser des outils plus traditionnels, comparables à ceux qui ont été utilisés pour l'étude du graphe des fonctions réelles.
Par exemple, si $\lim_{t \longrightarrow 0^+} |X(t)| = +\infty$, on pourra étudier la limite de $Y(t)$, puis s'il y a lieu celle du rapport $\frac{Y(t)}{X(t)}$, et encore, si cette dernière limite est finie et non nulle (disons α, la limite de $(Y(t) - \alpha X(t))$.

Exercice 14 : Le Folium de Descartes.
Etudier et représenter graphiquement la courbe $(\mathcal{C})$ définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1+t^3} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$$

On pourra utilement remarquer que le changement $t \longmapsto 1/t$ échange x et y.

Exercice 15 : Astroïde
Etudier et représenter graphiquement dans un repère orthonormé la courbe $(\mathcal{C})$ définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x(t) = acos^3t \\ y(t) = asin^3t \end{cases}$$

où a est un réel strictement positif donné.

Définition 4.22

On appelle épicycloïde la courbe décrite par le point M d'un cercle $C(\omega), R')$ qui roule sans glisser à l'extérieur d'un cercle $C(O, R)$.
Lorsque $R = R'$, cette courbe s'appelle encore la cardioïde.
Lorsque $R = 2R'$, cette courbe s'appelle la néphroïde.

Exercice 16 :
Effectuer la mise en équation, et donner une paramétrisation d'une épicycloïde.

Définition 4.23

> *On appelle* <u>*hypocycloïde*</u> *la courbe décrite par le point M d'un cercle $C(\omega), R')$ qui roule sans glisser à l'intérieur d'un cercle $C(O, R)$.*
> *Lorsque $R = 3R'$, cette courbe s'appelle encore l'*<u>*hypocycloïde à trois points de rebroussement*</u>*.*
> *Lorsque $R = 4R'$, cette courbe s'appelle l'*<u>*astroïde*</u>*.*

Exercice 17 :
Effectuer la mise en équation, et donner une paramétrisation d'une épicycloïde.

Exercice 18 : Etude du mouvement d'un point M d'une cercle (Γ), de rayon R, qui roule sans glisser sur une droite (D), son centre se déplaçant d'un mouvement uniforme.

Soit ω le centre du cercle (Γ), on appellera θ une mesure en radian de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega C}})$, C étant le point de contact du cercle (Γ) et de la droite (D).
Montrer que la trajectoire du point M est définie paramétriquement par

$$\begin{cases} x(\theta) = R\theta - Rsin(\theta) \\ y(\theta) = R - Rcos(\theta) \end{cases}$$

que l'on étudiera.

Exercice 19 : Courbe de Lissajous
Etude et représentation graphique de la courbe $(\mathcal{C})$ définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x(t) = cos(3t) \\ y(t) = sin(2t) \end{cases}$$

5 Coube en polaires

On voit bien que pour une courbe paramétrées en coordonnées cartésiennes, on dispose de tout ce qu'il faut pour l'étudier. Voyons maintenant les particularités de l'étude d'une courbe paramétrée en polaire.
On se place dans un plan affine euclidien, muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Rappelons que les coordonnées polaires d'un point M dans ce repère forment un couple (r, θ), tel que

$$\begin{cases} x = rcos(\theta) \\ y = rsin(\theta) \end{cases}$$

Cela provient du fait qu'il y a une bijection de $\mathbb{R}^{*+} \times]0, 2\pi[$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Rappelons que le point O a un statut un peu particulier.
Dans toute la suite, pour un réel θ, on posera

$$\overrightarrow{u(\theta)} := cos(\theta)\vec{i} + sin(\theta)\vec{j}.$$

Une courbe définie en polaire peut l'être, comme pour les coordonnées cartésiennes, de deux manières différentes :

- Par une paramétrisation en polaire explicite : on se donne $r(t)$ et $\theta(t)$, et $\overrightarrow{OM(t)} := r(t)\ \overrightarrow{u(\theta(t))}$,
- Par une équation implicite en polaire de la forme $f(r,\theta) = 0$.

Attention, une courbe en polaire ne l'est pas par ses coordonnées polaires. En effet $r(t)$ peut très bien être négatif.
Dans le deuxième cas, on peut se ramener, comme dans le cas des équations cartésiennes, au premier cas, au moins localement, grce au théorème des fonctions implicites. Sa preuve n'est pas au programme du CAPES, mais son énoncé, oui.

Théorème 5.8 (simplifié)

Soit F une fonction de classe $C^1 : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, où U est ouvert.
Soit (C) la courbe d'équation $F(x,y) = 0$, et soit $c \in U$, $c(x_0, y_0)$ tel que $F(c) = 0$, et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(c) \neq 0$,
alors il existe $(I \times J)$ deux intervalles ouverts contenant (x_0, y_0), et $\Psi : I \longrightarrow J$ de classe C^1 tels que

$$\forall (x,y) \in I \times J, (F(x,y) = 0 \Longleftrightarrow y = \Psi(x)),$$

et

$$\Psi'(x_0) = \frac{-\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Exercice 20 On considère la courbe d'équation $x^2 + y^2 = 1$. Appliquer ce théorème avec des intervalles maximaux en des points autres que $(-1, 0)$ ou $(1, 0)$.
Comment peut-on faire en ces deux points ?

Nous allons donc nous placer dans la suite dans le cas 1, qui correspond donc à l'étude d'un arc géométrique.
La première solution est de se ramener aux coordonnées cartésiennes. C'est ce que nous ferons de temps en temps, essentiellement pour des études locales.
Attention, le contraire arrive relativement souvent : on a un arc paramétré en coordonnées cartésiennes, et le texte demande son équation en polaire.

Dans toute la suite, on considère (γ) un arc simple de classe C^2 défini dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ par $t \longmapsto M(t)(r(t), \theta(t)$.
Rappelons donc que $\overrightarrow{OM(t)} := r(t)\ \overrightarrow{u(\theta(t))}$.

Exercice 21 :
Montrer que $\vec{u} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ \theta & \longmapsto & cos(\theta)\vec{i} + sin(\theta)\vec{j} \end{array}$ est C^∞ et exprimer $\dfrac{d^n}{d\theta^n}(\overrightarrow{u(\theta)})$ en fonction de n, $\overrightarrow{u(\theta)}$ et $\dfrac{d\ \overrightarrow{u(\theta)}}{d\theta}$.
On posera dans la suite $\overrightarrow{v(\theta)} := \dfrac{d\ \overrightarrow{u(\theta)}}{d\theta}$.
Montrer que $(\overrightarrow{u(\theta)}, \overrightarrow{v(\theta)})$ est une base orthonormée directe.

Exercice 22 :
Exprimer $\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}$ et $\frac{d^2\,\overrightarrow{OM}}{dt^2}$ en fonction de r et θ.

Le plan d'étude d'une courbe en polaire sera grosso modo le suivant :

1. Détermination de l'ensemble de définition de r et θ. Notons ici que le plus souvent ce sera θ le paramètre.
2. Utilisation de la périodicité pour réduire l'intervalle d'étude. Le bon sens devrait l'emporter sur les recettes apprises par coeur.

   Pour faire simple, il faut faire coïncider les périodicités de r et de θ. Lorsque le paramètre est θ, sa périodicité est 2π. Si par exemple, r est de périodicté π, alors on réduira l'intervalle d'étude à un intervalle de longueur π, puis on utilisera une symétrie centrale par rapport à O pour compléter le dessin de l'arc.

   Exercice 23 :
   Montrer le !
3. Utilisation de la partié pour réduire l'intervalle d'étude. Avec les mêmes remarques que ci-dessus.
4. Détermination du signe de r.

   En fait, l'étude des variations de r n'apporte en règle général que peu de renseignements.

5.1 Etude au voisinage d'un point ordinaire

Remarquons que $M(t)$ est un point ordinaire si et seulement si $(r'(t) \neq 0)$ et $(r(t)\theta'(t) \neq 0)$.
Alors la tangente est orientée par $(r'(t), r(t)\theta'(t))$ dans le repère $(\overrightarrow{u(\theta)(t)}, \overrightarrow{v(\theta)(t)})$.
On attaque là la difficulté principale : le repère dans lequel il est pratique de travailler est mobile !
On introduit $D_\theta(O, \vec{u}\,(\theta))$, la demi-droite passant par l'origine et faisant un angle θ avec l'axe des abscisses.
On pose V l'angle entre (D_θ) et la tangente au point M notée $\mathcal{T}_M$. On considèreré que l'arc est orienté, et donc V est un angle de vecteur :

$$V := (\vec{u}\,(\theta), \frac{dM}{dt}).$$

Le calcul donne $tan(V) = \frac{r(t)\theta'(t)}{r'(t)}$, et

$$\begin{aligned} cos(V) &= \frac{r'}{\sqrt{r^2\theta'^2 + r'^2}} \\ sin(V) &= \frac{r\theta'}{\sqrt{r^2\theta'^2 + r'^2}} \end{aligned}$$

Exercice 24 :
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la tangente passe par le point O.

Considérons dans un premier temps le cas $M(t_0) = 0$, i.e $r(t_0) = 0$.
r et θ étant continues, on en déduit que $\lim_{r \longrightarrow t_0} r(t) = 0$ et $\lim_{r \longrightarrow t_0} \theta(t) = \theta(t_0)$ noté θ_0.
Alors au voisinage du point $M(t_0)$, l'arc admet le support de D_{θ_0} comme tangente. Remarquons que l'on n'a besoin d'aucune hypothèse de régularité pour r et θ, c'est donc encore vrai pour un point stationnaire.

Exercice 25 :
Trouver les tangentes à l'origine pour le lemniscate ($r^2 = cos(2\theta)$) et pour la courbe $r = \sqrt{|\theta|}$.

5.2 Points d'inflexion

Exercice 26
Exprimer une condition nécessaire et suffisante pour que $M(t_0)$ soit un point d'inflexion.
Que devient cette condition si $\theta = t$?
En posant $\varphi(\theta] = \frac{1}{r(\theta)}$, traduire cette CNS et montrer que l'on trouve

$$\frac{1}{\varphi^3(\theta)}\left[\varphi(\theta) + \varphi''(\theta)\right]$$

5.3 Points stationnaires

Le plus souvent on se ramène aux coordonnées cartésiennes.

5.4 Branches infinies

On est dans le cas d'une branche infinie si et seulement si $\lim_{t \longrightarrow t_0} |r(t)| = +\infty$.
Eventuellement, $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.
On va supposer que r et θ sont de classe C^k au voisinage de t_0, contenant I un intervalle. On notera (Γ) le support de la courbe $\overrightarrow{OM(t)} := r(t)\ \overrightarrow{\theta(t)}$.
Pour que cette branche admette une direction asymptotique, il suffit que θ admette une limite θ_0 en t_0.
la direction asymptotique admet donc comme vecteur directeur $\overrightarrow{u(\theta_0)}$.
Soit alors $M(t)$ un point de (Γ), $H(t)$ son projeté orthogonal sur $\Delta_0 := (O, \overrightarrow{v(\theta_0)})$.

Exercice 27 :
Faire un dessin et montrer que

$$\overrightarrow{OM}\ .\ \overrightarrow{v(\theta_0)} = r(t) sin(\theta(t) - \theta_0).$$

Exprimer alors la limite de $\overline{OH}$ quand t tend vers t_0, la droite Δ_0 étant orienté par $\overrightarrow{v(\theta_0)}$.

Lorsque cette limite vaut en valeur absolue $+\infty$, on obtient une branche parabolique ;
Lorsqu'elle vaut h, on obtient une asymptote D_0 d'équation $\overrightarrow{OM}\ .\ \overrightarrow{v(\theta_0)} = h$. L'étude du signe de $\overline{OH}_h$ permet de placer la courbe par rapport à (D_0).

Exercice 28 :
Etudier $\rho = tan(\theta)$.
Etudier $r = \frac{1}{cos\theta + cos4\theta}$.

6 Propriétés métriques des arcs

On se place dans $\mathbb{R}^n$, avec $n = 2$ ou 3, muni de sa structure euclidienne canonique.

6.1 Longueur d'un arc rectifiable

Théorème 6.9

> *ON considère (γ) un arc compact de classe C^k, $k \geqslant 1$. Soit $f : [a, b] \longrightarrow E$ une paramétrisation de (γ).*
> *La longueur de (γ) est*
> $$L(\gamma) := \int_a^b ||f'(t)||dt.$$

On admet ce théorème.
En fait, il y a caché dans ce théorème la notion d'arc rectifiable : on considère une subdivision de $(_gamma)$, donc de $[a, b]$, et la ligne polygônale inscrite $[M_0, M_1], [M_1, M_2], \ldots$.
La borne supérieure lorsqu'elle existe est la longueur de l'arc, dont on dit qu'il est rectifiable.
Tout cela devrait vous rappeler quelque chose.

Exercice 29 :
Avec la paramétrisation habituelle de l'ellipse, calculer sa longueur (intégrale elliptique).

Exercice 30 :
En considérant une courbe paramétrée en polaire sur $[a, b]$, exprimer sa longueur.

6.2 Abscisse curviligne, paramétrisation normale

Définition 6.24

> *Soit (γ) un arc de classe au moins c^1. On appelle paramétrisation normale de (γ) toute paramétrisation $f : I \longrightarrow E$ telle que*
> $$\forall t \in I, ||f'(t)|| = 1.$$

Autrement dit, on obtient toujours avec le vecteur dérivée, le vecteur directeur normée de la tangente orientée.

Exercice 31 : Est-elle unique ?

Comment obtenir cette/une paramétrisation normale à partir d'une paramétrisation quelconque.

Théorème 6.10

Soit $f : I \longrightarrow E$ une paramétrisation admissible quelconque d'un arc régulier (γ) de classe C^k, $(k \geqslant 1)$, et soit $t_0 \in I$.

Pour tout $t \in I$, on pose $s(t) := \displaystyle\int_0^t ||f'(u)||du$ (1).

- *s définit un changement de paramètre admissible pour (γ) : (1) définit un C^kdifféomorphisme de I sur J. On notera $\varphi : J \longrightarrow I$ la bijection réciproque.*
- *$s \longmapsto f \circ \varphi(s - s_0)$ et $s \longmapsto f \circ \varphi(s_0 - s)$ sont des paramétrisations normales de (γ).*
- *Toute paramétrisation normale de (γ) est de cette forme. (deux orientations possibles le plus souvent)*

Définition 6.25

Si (γ) est simple et orienté selon le sens des t croissants, $s(t)$ est appelée abscisse curviligne comptée à partir du popint $M(t_0) := f(t_0)$.

Remarque 1 *Si g est une paramétrisation normale, $s \longmapsto g(s - s_0)$ en est aussi une.*

Proposition 6.11

Soit $M := g(s)$. $\forall r \in [\![1, k]\!]$, $g^{(r)}(s)$ ne dépend que de M et pas de la paramétrisation normale choisie.

On définit ainsi des invariants métriques. Ce n'est pas le cas avec une paramétrisation non normale.

6.3 Définitions

Soit (γ) un arc régulier orienté de classe C^1, deux fois dérivables, défini par une paramétrisation normale g.

Définition 6.26

$$\begin{array}{rccl} \vec{\tau} : & I & \longrightarrow & E \\ & s & \longmapsto & g'(s) \end{array}$$ *est appelée*

fonction vecteur unitaire tangent à (γ).

Si on change l'orientation de (γ), ce vecteur est changé en son opposé.

Définition 6.27

L'hyperplan passant par M et normal à $\overrightarrow{\tau(s)}$ est dit normal à (γ).

Si le point M est simple, $\vec{\tau}$ est le vecteur tangent à (γ) en M.

Définition 6.28

$$\begin{array}{rccl} \rho : & I & \longrightarrow & E \\ & s & \longmapsto & \|g''(s)\| \end{array}$$ *est appelée fonction courbure de (γ).*

Elle ne dépend donc pas de la paramétrisation normale choisie. Si M est simple, $\rho(s)$ est la courbure à (γ) en M.

Remarque 2 *M est un point d'inflexion si et seulement si $\rho(M) = 0$.*

Exercice 32 : Corriger l'énoncé de la remarque.

Si l'arc n'admet pas de point d'inflexion, la fonction vectorielle $\begin{array}{rccl} \nu : & I & \longrightarrow & E \\ & s & \longmapsto & \dfrac{g''(s)}{\rho(s)} \end{array}$ est