

# Agrégation Interne: Planche de Dénombrement

Nicolas ARNAUD, niarnaud@yahoo.fr

Programme abordé :

dénombrement, réduction de matrices et calcul matriciel, anneau  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  (bezout, lemme chinois),

## EXERCICE 1 : anagrammes

- 1) Combien y a-t'il d'anagrammes du mot MOT ?
- 2) Combien y a-t'il d'anagramme du mot MOTO ?
- 3) Combien y a-t'il d'anagrammes du mot MAMAMIA ?

## EXERCICE 2 : joueur polyvalent dans une équipe de sport

Dans le bled du coin, un entraîneur doit constituer une équipe en choisissant un gardien, 6 défenseurs et 4 attaquants.

Dans le club sont inscrits 8 défenseurs purs, 9 attaquants purs, 3 gardiens purs et un joueurs qui peut être au besoin soit gardien soit défenseur.

Combien d'équipes différentes l'entraîneur peut il constituer ?

## EXERCICE 3 : diviseurs

- 1) Combien le nombre 60 admet-il de diviseur ?
- 2) Soient  $p_1, \dots, p_l$  des nombres premiers deux à deux distincts et  $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in \mathbb{N}$ .

Posons  $N = \prod_{k=1}^l (p_k)^{\alpha_k}$ .

Montrer que  $N$  admet  $\prod_{k=1}^l (\alpha_k + 1)$  diviseurs.

## EXERCICE 4 : fonction d'Euler

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2, on note  $\varphi(n)$  le nombre d'éléments inversibles de  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \times)$  (c'est à dire l'ordre du groupe des inversibles).

0) Montrer que les inversibles de  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$  sont aussi les générateurs de  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$  et les classes des entiers premiers avec  $n$ .

1) Calculer  $\varphi(n)$  dans le cas où  $n$  est premier.

2) A l'aide du lemme chinois, dans le cas où  $n = pq$  avec  $p, q$  des nombres premiers montrer que  $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ .

3) Dans le cas où  $n = p^k$  avec  $p$  premier et  $k$  entier montrer que  $\varphi(n) = (p-1)p^{k-1}$ .

4) En s'inspirant du 2) et du 3) calculer  $\varphi(p^k q^r)$  avec  $p, q$  premiers et  $k, r$  entiers naturels non nuls.

### EXERCICE 5 : matrice d'incidence

Soient  $D_1, \dots, D_n$  des droites du plan et  $M_1, \dots, M_p$  des points du plan.

On considère la matrice  $A \in M_{p,n}(R)$  dont le coef d'indices  $(i, j)$  vaut 1 si  $M_i \in_j$  et 0 sinon.

Montrer que les coefs de  $A^t A$  donnent le nombre de droites parmi  $D_1, \dots, D_n$  passant par deux points donnés et que les coefs de  ${}^t A A$  donnent le nombre de points parmi  $M_1, \dots, M_n$  appartenant à l'intersection de deux droites données.

### EXERCICE 6 : dénombrement de chemins dans un graphe

Un randonneur a décidé de s'entraîner dans la coline située derrière chez lui en suivant les différents chemins reliant trois lieux remarquables : lieu 1 l'abris bois , lieu 2 la bergerie et lieu 3 la chapelle.

En notant  $a_{i,j}$  le nombre de chemins directs du lieu  $i$  vers le lieu  $j$  la matrice  $(a_{i,j})$  est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ (certains chemins sont des boucles ramenant au point de départ).}$$

Pour  $k \in \mathbb{N}^*$  on appelle itinéraire de longueur  $k$  entre les lieux  $i$  et  $j$  tout chemin permettant d'aller du lieu  $i$  au lieu  $j$  en empruntant exactement  $k$  chemins directs.

- 1) Calculer le nombre d'itinéraires de longueur 3 reliant la chapelle à la bergerie.
- 2) Calculer en fonction de l'entier  $n$  le nombre d'itinéraires de longueur  $n$  reliant la chapelle à la bergerie

### EXERCICE 7 : dénombrement par récurrence

On cherche à déterminer pour chaque entier  $n$  le nombre  $d_n$  de  $n$ -uplets d'éléments de  $\{P, F\}$  dans lesquels il n'y a jamais deux  $F$  qui se succèdent. On note respectivement  $f_n$  et  $p_n$  le nombre de  $n$ -uplets de ce type terminant respectivement par  $F$  et  $P$ .

- 1) Etablir une relation de récurrence sur  $f_n$  et  $p_n$ .
- 2) En déduire les expressions de  $f_n$ ,  $p_n$  et  $d_n$  en fonction de  $n$ .

On réalise une expérience aléatoire consistant à enchaîner des « pile » ou « face » jusqu'à l'obtention de deux « face » consécutifs.

- 3) Quelle est la probabilité que l'expérience dure au moins 10 lancer ?
- 4) Quelle est la probabilité que l'expérience dure exactement 10 lancer ?