DM d'agreg interne: Compléments sur les isométries du plan et de l'espace

Nicolas ARNAUD, niarnaud@yahoo.fr

notations :
Dans tout ce devoir E désignera l'espace affine euclidien de dimension 2 ou 3 et $\vec{E}$ l'espace vectoriel euclidien associé, c'est à dire sa direction.
De plus si f est une application affine on notera $\vec{f}$ sa partie linéaire et $Is(E)$ désignera l'ensemble des isométries affines de E.
Par ailleurs X désignera une partie non vide de E.
Sauf pour la PARTIE IV, toutes les isométries considérées seront des isométries affines.

1 PARTIE I : pour quelles isométries peut on parler de groupe ?

1)a) Montrer que l'ensemble des $g \in Is(E)$ tel que $g(X) = X$ est un sous groupe de $Is(E)$.
b) Vérifier que pour $g \in Is(E)$ telle que $g(X) \subset X$ et $g(X) \neq X$, g^{-1} ne stabilise pas X.

Commentaire : Pour parler de groupe d'isométries de X il faut donc "sacrifier" celles qui ne vérifient pas $g(X) = X$.
La suite montre que dans le cas compact cette condition est automatiquement vérifiée.

2) a) On suppose dans cette question X compacte. Montrer que pour $f \in Is(E)$ on a l'implication $f(X) \subset X \Rightarrow f(X) = X$. (on pourra raisonner par l'absurde, considérer la suite $(f^n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ avec $a \in X - f(X)$ et étudier la distance entre deux termes quelconques).

Commentaire : Dans le cas compact (fermé et borné) il n'y a donc rien à "sacrifier".
Maintenant, vérifions qu'en enlevant une de ces hypothèses ce n'est plus forcément vrai.

2)b)(cas non borné) Considérons le demi espace X des points de premiere coordonnée positive (dans un Repère quelconque fixé).
Montrer que l'ensemble des $g \in Is(E)$ tel que $g(X) \subsetneq X$ n'est pas vide.
c)(cas non fermé) Considérons le cas où E est le plan muni d'un répère orthonormé direct et où X désigne les points du cercle dont l'affixe dans ce repère est de la forme e^{in} avec $\in \mathbb{N}$. Montrer que la rotation g d'angle 1 radian vérifie $g(X) \subsetneq X$.

Dans la pratique on appellera donc « groupe des isométries $Is(X)$ de X »l'ensemble des $f \in Is(E)$ vérifiant $f(X) = X$.

2 PARTIE II : Des cas où on peut se ramener aux isométries linéaires

A) (centres de symétries)

1)a)Montrer que si X admet deux centres de symétrie O et O' alors la translation de vecteur $2\,\overrightarrow{OO'}$ appartient à $Is(X)$.
b) Montrer que si X admet un centre de symétrie O alors pour tout $f \in Is(X)$, le point $f(O)$ est encore centre de symétrie.
c) En déduire que si X est bornée et admet un centre de symétrie O alors O est point fixe de tous les éléments de $Is(X)$.
B) (ensembles finis)
Montrer que si X est fini, l'isobarycentre des élts de X est point fixe de tous les elts de $Is(X)$.
C)(ensemble n'admettant qu'un seul diamètre)
Montrer que si X est borné et n'admet qu'un seul diamètre (c'est à dire qu'a l'ordre des points près il n'y a qu'un seul couple de points de X situés à distance maximale l'un de l'autre) alors il existe un point fixe commun à tous les éléments de $Is(X)$.

Commentaire : En choisissant le point fixe pour origine d'un repère orthonormé on peut alors confondre les isométries étudiées avec leur partie linéaire.

3 PARTIE III : faut il prendre pour X le polygône plein, les cotés ou les sommets ?

On suppose dans cet exercice que X est un convexe compact. on appelle frontière de X les points de X qui n'appartiennent pas à l'intérieur de X.
a) Montrer que X est l'enveloppe convexe de sa frontière $Fr(X)$ (c'est à dire que tout elt de X est barycentre à coefs positifs d'éléments de $Fr(X)$).
b) Montrer que $Is(X) = Is(Fr(X))$ (c'est à dire d'une part que l'image d'un point de la frontière est un point de la frontière et d'autre part que toute isométrie de X est déterminée par sa restriction à $Fr(X)$)

Commentaire : Il revient donc au même d'étudier les isométries du cube "plein" ou du cube vu comme réunion de ses faces.

2)a) On note S (comme "sommets") l'ensemble des points extrémaux de X (ensemble des points M qui ne sont pas barycentre à coefs positifs de points de $X - \{M\}$) et on suppose que X est l'enveloppe convexe de S (ensemble des barycentres à coef positifs ou nuls d'elts de S).
Montrer que $Is(X) \subset Is(S)$.
b)Montrer que l'inclusion précédente est en fait une égalité d'ensembles.

Commentaire : il revient donc par exemple au même d'étudier les isométries du cube et les isométries de E préservant les sommets du cube.

3) On Considère le morphisme r du groupe $Is(X)$ dans le groupe $Aut(X)$ des permutations de X.

a) Montrer que si X contient un repère affine de E alors r est une injection.
b) Donner un exemple de partie X pour laquelle r n'est ni une injection , ni une surjection.

4 PARTIE IV : y a t'il des isométries non affines ?

On a traité jusqu'ici uniquement les isométries affines. Qu'en est il des isométries non affines de X ? En fait il n'y en a pas.
On traite le cas où $dim(E) = 2$ sachant que le cas de la dimension 3 est analogue.
On suppose que X contient assez de points pour fabriquer un repère affine du plan.
Soit $f : X \to X$ une application préservant les distances.

1) Soit (A, B, C) une base affine de X et d_1, d_2, d_3 trois réels positifs. Montrer qu'il existe au plus un point du plan à distances respectives d_1, d_2, d_3 de A, B, C.
2) Soient A', B', C' trois points de X. En déduire qu'il existe au plus une application $f : X \to X$ conservant la distance et envoyant A, B et C sur A', B' et C' respectivement.
3) Montrer que, si elle existe, f est la restriction à X d'une et une seule isométrie affine de E.

commentaire : Si X engendre un sous espace affine D distinct de E on montre de même que f est la restriction d'une et une seule application affine de D. Bien sur dans ce cas il existe une infinité de prologements qui ne sont même plus affines et aussi plusieurs prolongements différents en une isométrie affine de E.