Devoir Espace Hermitien

AI 2016/2017

Le 18 novembre 2016

Dans tout le problème, F désigne un espace vectoriel hermitien de dimension $n \geq 1$.
L'anneau des endomorphismes de F est noté $L(F)$, et la composée de deux éléments u et v de $L(F)$ est notée $u \circ v$. L'application unité $x \longmapsto x$ est notée I.
Le produit scalaire hermitien de deux éléments x et y de F est noté $< x, y >$. A ce produit scalaire hermitien est associée une norme donnée pour tout élément x de F par la formule $||x|| =< x, x >^{\frac{1}{2}}$.
Si M est une partie non vide de F, l'orthogonal de M est l'ensemble

$$M^{\perp} = \{x \in F / \forall y \in M, < x, y >= 0\}.$$

On rappelle que si $u \in L(F)$, il existe un unique élément u^* de $L(F)$ vérifiant

$$\forall x \in F, \forall y \in F, \qquad < u(x), y >=< x, u^*(y) > .$$

L'anneau des matrices carrées complexes à n lignes et n colonnes est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n\mathbb{C}$, l'adjointe A^* de A est la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de la transposée de A.
Autrement dit $A^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{1,1}} & \dots & \overline{a_{n,1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1,n}} & \dots & \overline{a_{n,n}} \end{pmatrix}$.
Un élément $u \in L(F)$ sera dit respectivement

- i normal si $u^* \circ u = u \circ u^*$
- ii unitaire si $||u(x)|| = ||x||$ pour tout $x \in F$
- iii hermitien si $< u(x), x >$ est réel pour tout $x \in F$
- iv positif si $< u(x), x >$ est un réel positif ou nul pour tout $x \in F$.

Les candidats pourront utiliser sans démonstration le résultat suivant :

(S) Pour tout $u \in L(F)$, il existe une famille finie $F_1, \dots, F_k$ de sous-espaces vectoriels de F, une famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ de nombres complexes et une famille $(p_1, \dots, p_k)$ d'entiers positifs telles que $F = F_1 + \dots + F_k$, $u(F_i) \subset F_i$, et $(u - \lambda_i I)^{p_i}(x) = 0$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$ et pour tout $x \in F_i$.

Partie I

Pour $z \in C$, on note Rez la partie réelle de z et Imz la partie imaginaire de z. On pose :

$$e^z = e^x(cosy + isiny) \quad \text{où } x = Rez, y = Imz$$

1. Soit m un entier positif ou nul.
   Calculer $cos\frac{m\pi}{2} + isin\frac{m\pi}{2} - i^m$.

2. Soit n un entier positif ou nul, et soient θ et t deux réels.

   Donner une expression simple de :

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!(n-p)!}(cos\theta)^p(sin\theta)^{n-p}cos\left((n-p)\frac{\pi}{2}\right)$$

   et

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!(n-p)!}(cos\theta)^p(sin\theta)^{n-p}sin\left((n-p)\frac{\pi}{2}\right)$$

3. Soit θ un réel fixé. On pose, pour $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{tcos\theta}.cos(tsin\theta) \\ g(t) &= e^{tcos\theta}.sin(tsin\theta) \end{aligned}$$

   (a) Calculer $f^{(n)}(t)$ et $g^{(n)}(t)$ pour $n \geq 0$.

   (b) En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer que les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n cos(n\theta)}{n!} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n sin(n\theta)}{n!}$$

   convergent pour tout $t \in \mathbb{R}$ et que l'on a

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n cos(n\theta)}{n!} \\ g(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n sin(n\theta)}{n!} \end{aligned}$$

4. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Partie II

1. On pose, pour $u \in L(F)$,

$$|||u||| = \underset{||x|| \leq 1}{Sup}\ ||u(x)||$$

   Montrer que $|||u||| = \displaystyle\underset{x \in F\setminus\{0\}}{Sup} \frac{||u(x)||}{||x||}$.

2. (a) Montrer que l'on définit ainsi une norme sur $L(F)$.

   (b) Vérifier que $|||I||| = 1$ et que $|||u \circ v||| \leq |||u|||.|||v|||$ pour tout u, v dans $L(F)$.

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $L(F)$ et soit $u \in L(F)$. Montrer que si (u_n) converge vers u dans l'espace normé $L(F)$, alors $v \circ u_n \circ w$ converge vers $v \circ u \circ w$ pour tout v, w dans $L(F)$.

4. Montrer que $|||u^* \circ u||| = |||u|||^2$ pour tout $u \in L(F)$.

5. Soit $u \in L(F)$

   (a) Vérifier que $(u^*)^* = u$,
   (b) Montrer que $|||u||| = |||u^*|||$.

6. *Application numérique* :

   On considère l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ dont les éléments sont notés $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ n éléments fixés de $\mathbb{C}$, et soit v l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini pour tout élément $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{C}^n$ par la formule $v(X) = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix}$.

   On munit $\mathbb{C}^n$ du produit scalaire défini pour deux éléments quelconques $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{C}^n$ par la formule :

$$< X, Y >= \sum_{p=0}^{n} x_p.\overline{y_p}.$$

   Calculer $|||v|||$.

7. *Application numérique* :

   On reprend les notations du 6), avec $n = 2$. Soit w l'élément de $L(\mathbb{C}^2)$ défini pour tout élément $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{C}^2$ par la formule : $w(X) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ \sqrt{2} x_2 \end{pmatrix}$.

   Calculer $|||x|||$.

Partie III

1. Vérifier les propriétés suivantes : $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall \mu \in \mathbb{C}, \forall u \in L(F), \forall v \in L(F)$,
   $(\lambda u + \mu v)^* = \overline{\lambda} u^* + \overline{\mu} v^*$, $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.
2. Soit $u \in L(F)$ tel que $< u(x), x >= 0$ pour tout $x \in F$.
   (a) Montrer que $< u(x), y > + < u(y), x >= 0$, pour tout x, y dans F.
   (b) Montrer que $u = 0$.
3. Soit $u \in L(F)$
   (a) Montrer que si $u^* = u$ alors u est hermitien.
   (b) Montrer réciproquement que si u est hermitien alors $u^* = u$.
4. Montrer que $u^* \circ u$ est positif pour tout $u \in L(F)$.
5. Soit u un élément de $L(F)$.

(a) Montrer que si u est unitaire alors

$$< x, x >=< u^* \circ u(x), x > \quad \text{pour tout } x \in F.$$

Calculer $u^* \circ u$ et $u \circ u^*$.

(b) Montrer que, si réciproquement $u^* \circ u = I$ alors u est unitaire.

6. Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de F, soit $u \in L(F)$ et soit A la matrice représentant u dans la base B.

   (a) Quelle est la matrice représentant u^* ?

   (b) Que peut-on dire de A si u est normal ?
   Même question si u est hermitien, ou si u est unitaire.

7. L'élément w de $L(\mathbb{C}^2)$ défini au II.7 est-il normal ? (le produit scalaire hermitien considéré est celui du II.6).

Partie IV

Dans toute cette partie, u désigne un élément normal de $L(F)$.

1. Montrer que $||u(x)|| = ||u^*(x)||$ pour tout $x \in F$.

2. Montrer que $u - \lambda I$ est normal pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

3. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose $F_\lambda = \{x \in F / u(x) = \lambda x\}$ et $G_\lambda = \{x \in F / u^*(x) = \lambda x\}$.
   Montrer que $F_\lambda = G_\lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

4. Soit H un sous-espace vectoriel de F tel que $u(H) \subset H$, $u^*(H) \subset H$.
   Montrer que $u(H^\perp) \subset H^\perp, u^*(H^\perp) \subset H^\perp$.

5. Soit $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ l'ensemble des valeurs propres distinctes de u.
   On pose $H = (F_{\lambda_1} + \ldots + F_{\lambda_r})^\perp$.
   Montrer que $H = \{0\}$.

6. Montrer que si $i \neq j$, alors $F_{\lambda_i} \subset (F_{\lambda_j})^\perp$.

7. Montrer qu'il existe une base orthonormée de F formée de vecteurs propres de u.

8. *Application numérique :*
   On munit $\mathbb{C}^2$ du produit scalaire hermitien défini au II.6. Soit ρ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ défini pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{C}^2$ par la formule :

$$\rho(X) = \begin{pmatrix} (i+2)x_1 + (i-2)x_2 \\ (i-2)x_1 + (i+2)x_2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Montrer que ρ est normal.

   (b) Trouver une base orthonormée (f_1, f_2) de $\mathbb{C}^2$ pour laquelle ρ est représenté par une matrice diagonale que l'on calculera.

Partie V

Si $u \in L(F)$, et si n est un entier positif, on pose $u^n = u \circ \ldots \circ u$, avec par convention $u^0 = I$. L'espace $L(F)$ est muni de la norme définie au II.

1. Montrer que la série de terme général $\dfrac{|||u^m|||}{m!}$ est convergente pour tout $u \in L(F)$.
2. Soit $u \in L(F)$. On pose, pour $n \geq 1$,
$$v_n = \sum_{m=0}^{n} \frac{u^m}{m!}.$$
Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy dans $L(F)$. En déduire qu'elle converge dans $L(F)$.
Dans toute la suite, on pose, pour tout $u \in L(F)$,
$$exp(u) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{u^m}{m!}.$$
3. Soient $(u, v) \in L(F)^2$ tels que $u \circ v = v \circ u$.
   (a) Etablir l'inégalité
$$|||\left(\sum_{m=0}^{n} \frac{u^m}{m!}\right) \circ \left(\sum_{m=0}^{n} \frac{v^m}{m!}\right) - \left(\sum_{m=0}^{n} \frac{(u+v)^m}{m!}\right)||| \leq \sum_{m=n+1}^{2n} \frac{(|||u||| + |||v|||)^m}{m!}.$$
   (b) En déduire que $exp(u + v) = exp(u) \circ exp(v)$.
4. Montrer que l'application $u \longmapsto u^*$ est une application continue de l'espace normé $L(F)$ dans lui-même.
5. Montrer que $exp(u^*) = (exp(u))^*$ pour tout $u \in L(F)$.
6. Soit $u \in L(F)$.
   (a) Etablir pour tout $t \in \mathbb{R}$ l'inégalité
$$|||\frac{exp(tu) - I}{t} - u||| \leq \frac{e^{|t|\cdot|||u|||} - 1}{|t|} - |||u|||.$$
   (b) Calculer $\displaystyle\lim_{t\longrightarrow 0} \frac{exp(tu) - I}{u}$.
7. Soit $u \in L(F)$ et soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in F$ vérifiant $u(x) = \lambda x$.
Montrer que $(exp(u))(x) = e^{\lambda}.x$
8. *Application numérique :*
   (a) Donner la matrice de $exp(w)$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$ où w est l'endomorphisme défini au II.7
   (b) Même question pour $exp(\rho)$ où ρ est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ défini au IV.8

Partie VI

1. Soit $u \in L(F)$ et soit $x \in E$. On suppose qu'il existe $p \geq 2$ tel que $u^p(x) = 0$, $u^{p-1}(x) \neq 0$.
   Donner un équivalent de $||exp(itu)(x)||$ quand $t \longrightarrow \infty$ (t étant réel).

2. Soit $u \in L(F)$ tel que la fonction d'une variable réelle $t \longmapsto |||exp(itu)|||$ soit bornée sur $\mathbb{R}$.
   (a) u est-il nécessairement diagonalisable ?
   (b) Que peut-on dire des valeurs propres de u ?

3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur u pour que l'application $t \longmapsto |||exp(itu)|||$ soit bornée sur $\mathbb{R}$.

4. Caractériser l'ensemble des éléments u de $L(F)$ vérifiant $exp(u) = I$.

5. *Application numérique :*
   On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{C}^2$ défini pour tout élément $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{C}^2$ par la formule :
   $$u(X) = \begin{pmatrix} 14\pi x_1 - 8\pi x_2 \\ 2\pi x_1 - 14\pi x_2 \end{pmatrix}$$
   Calculer $exp(itu)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et montrer que
   $$1 < \underset{t\in\mathbb{R}}{Sup}\, |||exp(itu)||| < +\infty.$$

Partie VII

1. Soit u un élément hermitien de $L(F)$.
   Montrer que $exp(itu)$ est unitaire pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2. Soit v un endomorphisme unitaire de $L(F)$.
   Montrer qu'il existe un endomorphisme hermitien u de F tel que $exp(iu) = v$.
   L'endomorphisme u est-il unique ?

3. Soit $u \in L(F)$. On suppose que $|||exp(itu)||| \leq 1$, pout tout $t \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $exp(itu)$ est unitaire pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que u est normal (on pourra utiliser V.6).
   (c) Montrer qu'en fait u est hermitien.

4. *Application numérique :*
   On considère l'endomorphisme Φ de $\mathbb{C}^2$ défini pour tout élément $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{C}^2$ par la formule :
   $$\Phi(X) = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{-x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$
   Vérifier que Φ est unitaire. Trouver un élément hermitien u de $L(\mathbb{C}^2)$ tel que $exp(iu) = \Phi$.