0pt0.4pt

1. Programme abordé :
   groupes, actions (ou opérations) de groupes, stabilisateur d'un élément, orbite, équation aux classes, isométries linéaires et affines de l'espace et du plan, fonctions affines,

   rappels : les applications affines préservent les barycentres, envoient un sous espace affine sur un sous espace affine , envoyent un repère sur un repère . La partie linéaire d'une composée est la composée des parties linéaires. Une application affine est complètement déterminée par la donnée de l'image des points d'un repère affine.
   Les isométries affines préservent de plus la dimension des sous espaces affines, l'orthogonalité, le produit scalaire et la distance ; elles envoyent donc un repère orthonormé sur un repère orthonormé.La partie linéaire d'une isométrie affine est une isométrie linéaire et les translations sont les isométries de partie linéaire égale à l'identité.
   Pour une partie X d'un espace affine E, on appelle isométrie de X toute application $g \in Is(E)$ tel que $g(X) = X$ (avec $Is(E)$ l'ensemble des isométries affines de E).
   Enfin nous utiliserons la notation $|A|$ pour désigner le cardinal d'un ensemble A.

2. EXERCICE : quelques actions de groupes en géométrie
   1) Montrer que le groupe des bijections affines du plan dans lui même opère naturellement sur l'ensemble des points du plan et sur l'ensemble des droites du plan.

   2) Soit E un espace vectoriel. Montrer que $Gl(E)$ opère sur les Sev de E.

   3) Vérifier que le groupe des similitudes directes linéaires du plan opère sur l'ensemble des couples de vecteurs non nuls du plan (RQ : ceci permet de définir les angles orientés du plan)

   4) Vérifier que le groupe des rotations linéaires du plan opère sur l'ensemble des bases orthonormées du plan (Rq : ça permet de définir la notion d'orientation des BON)

   5) On considère un tétraèdre régulier T de l'espace euclidien (vu comme ensemble de sommets). Vérifier que le groupe des isométries de T agit sur T et en déduire qu'il est isomorphe à σ_4.

   6) On considère un pentagone régulier P du plan euclidien (vu comme ensemble de sommets).
   a) Déterminer le stabilisateur de chaque point de P pour l'action sur P du groupe D_5 des isométries de P.
   b) Déterminer le nombre d'orbites et déduire le cardinal de D_5.
   c) Déterminer la liste de tous les éléments de D_5.

3. EXERCICE : dénombrement avec formule de Burnside
   Soit X un ensemble non vide fini et G un groupe fini agissant sur X.
   Pour chaque élément x on note $\overline{x} = \{g.x, g \in G\}$ son orbite et $S(x) = \{g \in G \text{ tq } g.x = x\}$ son stabilisateur. Notons également θ l'ensemble des orbites pour l'action de G.
   On rappelle que pour $x, x' \in X$, on a l'implication $(\overline{x} = \overline{x'}) \Rightarrow (|S(x)| = |S(x')|)$.
   Rappelons également l'équation aux classes :

$|X| = \sum_{\overline{x}\in\theta} \frac{|G|}{|S(x)|} = \sum_{\omega\in\theta} |\omega|$.

0) Rappeler pourquoi on a $\forall x \in X, |G| = |\overline{x}| \times |S(x)|$.

1) Soit $\omega \in \theta$. Montrer que $\sum_{x\in\omega} |S(x)| = |G|$.

2) En déduire la formule : $\frac{1}{|X|} \sum_{x\in X} |S(x)| = |G|$.

3) Retrouver grâce à cette formule le cardinal de l'ensemble des isométries du tétraèdre régulier et du pentagone régulier.

4) Déterminer le nombre d'isométries du cube puis du polygône régulier à $n > 2$ cotés.

5) Pour chaque $g \in$ on appelle fixateur de x l'ensemble $Fix(g) = \{x \in X, g.x = x\}$.

Posons $A = \{(g, x) \in G \times X \text{ tq } g.x = x\}$.

a) Montrer que $|A| = \sum_{x\in X} |S(x)| = \sum_{\omega\in\theta} \sum_{x\in\omega} |S(x)| = |\theta| \times |G|$.

b) Montrer que d'autre part $|A| = \sum_{g\in G} |Fix(g)|$

c) En déduire la formule de burnside : $|\theta| = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} |Fix(g)|$.

6) Application de burnside :

de combien de façons différentes (à isométries près) peut on peindre les sommets d'un tétraède si on dispose de 3 couleurs ?

4. EXERCICE : Exemples de groupes d'isométries d'un ensemble donné

On entend par triangle, tétraedre, carré etc... l'ensemble des sommets du triangle, tétraèdre... Dessiner X et déterminer son groupe d'isométries $Is(X)$ dans les cas suivants.

A)sous ensembles du plan.

1) avec X un segment non réduit à un point.
2) avec X un triangle équilatéral.
3) avec X un carré.
4) avec X l'union de deux droites sécantes.
5) avec X une ellipse d'équation réduite $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ avec $a > b > 0$.
6) avec X une hyperbole d'équation réduite $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ avec $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$.

B) sous ensembles de l'espace.

1) avec X l'union de deux droites non coplanaires.
2) avec X l'union de deux plans sécants

5. EXERCICE : action de groupe et théorie des groupes

On considère ici un groupe G fini de cardinal n.

1) a)(th de lagrange) soit H un sous groupe de G. Vérifier H agit sur G par multiplication à gauche $((h,x) \mapsto h.x)$ puis à l'aide de l'équation aux classes montrer que le cardinal de H divise celui de G.

b) En déduire ce corolaire bien connu : l'ordre de tout élt de G divise le cardinal de G.

2) (th de cauchy) On suppose que p est un diviseur premier de n. On considère l'ensemble $E = \{(g_1, .., g_p) \in G^p / g_1 \times .. \times g_p = 1\}$. On considère le sous groupe S de σ_p engendré par la permutation circulaire $(1, 2, .., p)$.

a) Déterminer les cardinaux de E et S.

b) Montrer que S agit sur E par $(\sigma, (g_1, .., g_p)) \mapsto (g_{\sigma(1)}, .., g_{\sigma(p)})$.

c) Grâce à l'équation aux classes montrer que qu'il existe au moins un élément de E (en plus de $(1, .., 1)$) dont l'orbite est réduite à 1 élément.

d) Montrer que les seuls éléments du type précédent sont de la forme $(g, g, .., g)$ avec $g \in G$ et déduire qu'il existe au moins un élément d'ordre p dans G .

3) Dans cette question on suppose que n est une puissance d'un premier p. On appelle centre de G l'ensemble des éléments qui commutent avec tous les élts de G.

a) Montrer que G agit sur lui même par conjugaison $((g,x) \mapsto g.x.g^{-1})$.

b) Grâce à l'équation aux classes montrer qu'il existe au moins un elt de G (en plus de 1) dont l'orbite est réduite à un élément.

c) En déduire que le centre de G est un sous groupe non réduit au neutre.

4) On suppose ici que $n = p^2$ avec p premier. on note Z le centre de G

En considérant un élément de G dont la classe engendre le quotient G/Z montrer que G est commutatif.

6. EXERCICE : groupes finis d'isométries affines du plan

1) Montrer que pour tout sous groupe fini G du groupe des automorphismes affines du plan il existe un point fixe par tous les éléments de G (considérer le barycentre d'une orbite).

2) Montrer que pour tout sous groupe fini G du groupe des automorphismes linéaires du plan il existe un produit scalaire pour lequel tous les éléments de G sont des isométries (pour une forme quadratique définie positive q considérer la somme des $q \circ g$ pour $g \in G$).