II 1) Considerons l'opération definie par :

$\forall g \in G, \ \forall M \in P \quad g.M = g(M)$.

avec G le gpe des bijections affines du plan P dans lui même.

on a $\forall g, h \in G, \forall M \in P \quad h.g.M = h.(g(M))$
$= h(g(M))$
$= h\circ g . M$.

et $\forall M \in P, \ Id_P . M = M$.

donc l'opération qu'on vient de definir est une action de G sur P.

considerons maintenant l'operation definie par :

$\forall g \in G \ \forall d \in D \quad g * d = g(d)$ (image de la dte d par g)

où D designe l'ensemble des droites du plan P.

L'image d'une dte par une bijection affine étant une droite

"$*$" definit bien une application de $G \times D$ dans D.

on verifie immédiatement que

$\forall g, h \in G, \forall d \in D$

$g * h * d = g(h(d)) = \{ g(h(M)), M \in d \}$
$= \{ g\circ h(M), M \in d \}$
$= g\circ h \ (d) = g\circ h * d$

et $\forall d \in D \quad Id_P(d) = d$.

$*$ est bien une action de G sur D.

2) Considérons l'opération définie par :

$\forall g \in GL(E) \ \forall V \in S \quad g.V = g(V)$

où S désigne l'ensemble des sev de E.

l'image d'un sev par un automorphisme etant un sev "." définit bien une application de

$GL(E) \times S$ dans S.

on a encore $\forall g, h \in GL(E), \forall V \in S$

$g.h.V = (g\circ h).V$

et $Id_E . V = V$.

3) en notant G le gpe des similitudes directes (linéaires)

l'action en question est définie par $\forall g \in G$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E - \{\vec{0}\}$

$$g \cdot (\vec{u}, \vec{v}) = (g(\vec{u}), g(\vec{v}))$$

(vérifs immédiates)

4) l'action est quasiment la même qu'en 3).

5) soit G le gpe des isométries de l'espace laissant T globalement invariant.

l'opération définie par $\forall g \in G$, $\forall M \in T$

$g \cdot M = g(M)$ est encore une action (cf questions précédentes)

Notons 1, 2, 3 et 4 les sommets du tétraèdre, et notons pour chaque $g \in G$, φ_g la fct $T \to T$, $M \mapsto g(M)$.

φ_g étant la restriction de la bijection g à T.

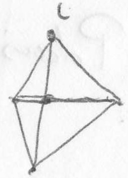
φ_g est encore bijective.

on peut donc considérer la fonction

$$\varphi : G \to \sigma(T) = \sigma_4$$
$$g \mapsto \varphi_g .$$

φ est clairement un morphisme de $(G, \circ)$ vers $(\sigma_4, \circ)$

surjectivité : par ailleurs soient i, j deux éléments de T non confondus et k, l les sommets restants.



la réflexion r de plan passant par k, l et par le milieu du segment reliant i et j vérifie

alors $\varphi_r = \tau_{ij}$ (transposition échangeant i et j)

i et j pouvant être n'importe quels sommets de T

on a montré que $\varphi(G)$ contient toutes les transpositions.

Et comme les transpositions engendrent σ_4

on a $\boxed{\varphi(G) = \sigma_4}$.

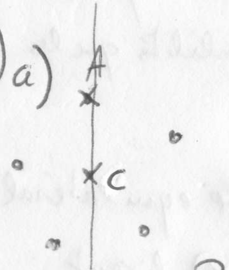
donc φ est surjectif.

injectivité : On sait que une application affine de l'espace dans lui même est complètement déterminer par l'image d'un repère affine, or T forme un repère affine de l'espace. (4 points non coplanaire).

Soit $g \in G$ tq $\varphi(g) = Id_T$

on a alors $\forall M \in T$, $g(M) = M$ or l'application affine (la seule) qui fixe chaque point du repère T est l'identité.

Donc $g = Id$ ccl : $\ker \varphi = \{Id\}$ et φ est injective ccl générale : G est bien isoϕ à S_4.

6) a)  l'image par une application affine d'un barycentre étant le barycentre des images, toute application affine laissant P globalement invariant admettra l'iso-barycentre de P comme point fixe.

Notons C l'isobarycentre de P.

Soit A un sommet de P.

Toute isométrie de P qui fixe A laissera donc fixes tous les points de (AC).

Le stabilisateur de A contient donc seulement l'identité et la reflexion d'axe (AC).

b) clairement en effectuant des rotations d'angle $\frac{2\pi}{5}$ de centre C successives on peut envoyer n'importe quel sommet de P sur n'importe quel autre.

Il n'y a donc qu'une seule orbite pour l'action de D_5 sur P.

l'équation aux classes nous dit que le cardinal de P est égal à $\sum_{x \in O} \frac{|D_5|}{|S_x|}$ où O est l'ensemble des orbites et où pour $x \in P$, S_x désigne le stabilisateur de x.

ici on obtient $5 = \frac{|D_5|}{2}$

donc $\boxed{|D_5| = 10}$

c). il y a d'abord l'identité.

. il y a ensuite les rotations de centre C d'angles respectifs égaux à $\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, -\frac{2\pi}{5}, -\frac{4\pi}{5}$.

. il y a enfin les reflexions par rapport à un axe reliant un sommet au milieu du côté opposé.

Comme on sait que $|D_5| = 10$ on les a toutes trouvées

IV

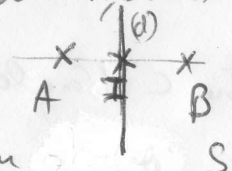
Remarques préalables : les isométries affines préservent les distances, les barycentres, les angles géométriques.

Comme les distances sont préservées, l'image d'un diamètre est un diamètre.

On sait aussi que l'image d'une droite est une droite, et l'image d'un plan est un plan.

A)

1) soit A, B deux points distincts du plan et $S=\{A,B\}$



pour S globalement invariant une isométrie doit envoyer A sur A et B sur B ou A sur B et B sur A.

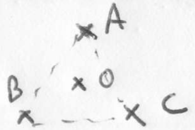
en tous les cas l'image de (AB) sera (AB) et l'image du milieu I de [AB] sera I.

Par ailleurs comme les angles sont conservés (en particulier l'orthogonalité) la dte (d) perpendiculaire à (AB) passant par I est sa propre image pour ~~toute~~ isométrie de S.

Les isométries de S sont donc : l'identité, la symétrie de centre I, la réflexion d'axe (d) et la réflexion d'axe (AB).

Rq : en posant $\vec{i} = \frac{\vec{IB}}{IB}$ et en prenant $\vec{j}$ un vecteur unitaire directeur de (d), sachant que une isométrie est complètement déterminée par l'image d'un repère on s'aperçoit qu'il n'y a pas d'autres possibilités que les 4 citées.

2) soit A, B et C les sommets du triangle équilatéral X.



Tous les éléments de $Is(X)$ fixent l'isobarycentre de A, B et C.

Comme A, B et C forment un repère affine du plan tout élément de $Is(X)$ sera complètement déterminé par les images de A, B et C.

~~En...~~ En identifiant $\sigma(\{A,B,C\})$ à σ_3 l'application

$$\varphi : Is(X) \longrightarrow \sigma_3$$
$$g \longmapsto (M \mapsto g(M))$$

est donc injective car $g \in \operatorname{Ker}\varphi$

$\iff g(A)=A$ et $g(B)=B$ et $g(C)=C$

$\iff g = Id$

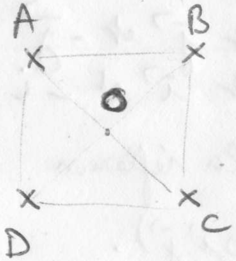
De plus toutes les transpositions sont de la forme $\varphi(r)$ avec r réflexion par rapport à une dte reliant un sommet au milieu du segment opposé.

Les transpositions engendrant σ_3 on a $\operatorname{Im}\varphi = \sigma_3$ donc φ est un iso.

liste des éléments de $Is(X)$:

- l'identité.
- les rotations de centre l'isobarycentre de X et d'angles respectifs $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$
- les trois reflexions par rapport à des axes reliant un sommet au milieu du côté opposé.

3)



Là encore les elts de $Is(X)$ fixent le centre O du ~~carré~~. Notons A, B, C et D les sommets successifs. Ici les diamètres sont les diagonales. Donc l'image d'une diagonale est une diagonale.

Soit $g \in Is(X)$.

cas 1 : supposons $g(\{A, C\}) = \{A, C\}$.
on a donc $g\{B, D\}) = \{B, D\}$.

les images possibles pour A sont A et C
" " " " B " B et D.

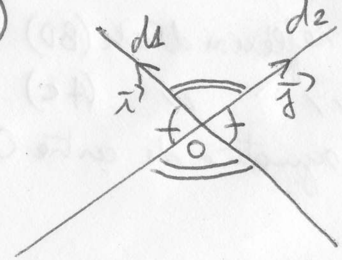
et comme $O\,A\,B$ forme un repère affine du plan.
g est complètement determinée par les images de A et B (sachant que O est sa propre image).

- si $g(A) = A$ et $g(B) = B$ — $g = Id$.
- si $g(A) = C$ et $g(B) = B$ — g est la reflexion d'axe (BD)
- si $g(A) = A$ et $g(B) = D$ — " " " (AC)
- si $g(A) = C$ et $g(B) = D$ — " " symetrie de centre O.

cas 2 : supposons $g(\{A, C\}) = \{B, D\}$:
on a alors $g(\{B, D\}) = \{A, C\}$.
là encore les images de A et B determinent g.

- si $g(A) = D$ et $g(B) = C$ — g est la reflexion d'axe reliant les milieux de $[AD]$ et $[BC]$
- si $g(A) = D$ et $g(B) = A$ — g est la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{4}$.
- si $g(A) = B$ et $g(B) = A$ — g est la reflexion d'axe reliant les milieux de $[AB]$ et $[DC]$
- si $g(A) = B$ et $g(B) = C$ — g est la rotation de centre O d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

comme il n'y a pas d'autres cas on vient de trouver tous les elts de $Is(X)$ et il y en a 8.

4) 

l'image d'une dte par un élément de $Is(X)$ est une droite.

notons d_1 et d_2 les droites sécantes dont X est la réunion et O le point d'intersection de d_1 et d_2.

Soit $g \in Is(X)$.

on a $(g(d_1)=d_1$ et $g(d_2)=d_2)$ ou $(g(d_1)=d_2$ et $g(d_2)=d_1)$

de plus $\underbrace{g(d_1\cap d_2)}_{=\{O\}} \in g(d_1)\cap g(d_2) = \underbrace{d_1\cap d_2}_{=\{O\}}$.

donc $g(O)=O$.

Soit $\vec{i}$ un vecteur unitaire directeur de d_1

et $\vec{j}$ " " " d_2.

$(O,\vec{i},\vec{j})$ formant un repère g est complètement déterminée par $\vec{g}(\vec{i})$ et $\vec{g}(\vec{j})$ (où $\vec{g}$ désigne la partie linéaire de g).

(sachant que O est sa propre image).

<u>cas 1</u>: si $g(d_1)=d_1$ et $g(d_2)=d_2$.

les images possibles pour $\vec{i}$ sont $\vec{i}$ et $-\vec{i}$

et " " " $\vec{j}$ sont $\vec{j}$ et $-\vec{j}$.

- si $\vec{g}(\vec{i})=\vec{i}$ et $\vec{g}(\vec{j})=\vec{j}$ on a $g = Id$.
- si $\vec{g}(\vec{i})=-\vec{i}$ et $\vec{g}(\vec{j})=-\vec{j}$ g est la symétrie de centre O

les sous espaces propres de $\vec{g}$ étant orthogonaux

les cas $(\vec{g}(\vec{i})=\vec{i}$ et $\vec{g}(\vec{j})=-\vec{j})$ et $(\vec{g}(\vec{i})=-\vec{i}$ et $\vec{g}(\vec{j})=\vec{j})$ ne sont possibles que si $d_1 \perp d_2$.

et dans ce cas il conduisent respectivement à:

(g est la réflexion d'axe d_1) et (g est la réflexion d'axe d_2)

<u>cas 2</u> si $g(d_1)=d_2$ et $g(d_2)=d_1$

les images envisageables pour $\vec{i}$ sont $\vec{j}$ et $-\vec{j}$

" " " $\vec{j}$ sont $\vec{i}$ et $-\vec{i}$

- si $\vec{g}(\vec{i})=\vec{j}$ et $\vec{g}(\vec{j})=\vec{i}$ g est la réflexion par rapport à la bissectrice de l'angle $(O,\vec{i},\vec{j})$.
- si $\vec{g}(\vec{i})=-\vec{j}$ et $\vec{g}(\vec{j})=-\vec{i}$ g est la réflexion par rapport à la bissectrice de l'angle $(O,\vec{i},-\vec{j})$.

g préserve le produit scalaire donc le cas $\vec{g}(\vec{i})=\vec{j}$ et $\vec{g}(\vec{j})=-\vec{i}$ n'est possible que si

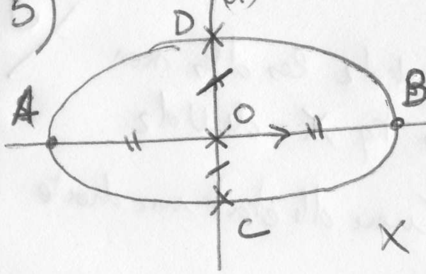
$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot(-\vec{i}) = -\vec{i}\cdot\vec{j}$.

Idem pour le cas $\vec{g}(\vec{i})=-\vec{j}$ et $\vec{g}(\vec{j})=\vec{i}$.

Donc si d_1 et d_2 ne sont pas $\perp$ ces cas ne sont pas possibles

Si $d_1 \perp d_2$ ces cas correspondent à ceux où g est une rotation d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$ de centre O.

5)



soient A et B les sommets de X et O son centre (milieu de [AB])

X admet un seul diamètre ($\{A,B\}$) qui donc sa propre image pour tout elt de $Is(X)$.

Par conséquent O est fixé pour tout elt de $Is(X)$ comme isobarycentre de A et B.

Soit $g \in Is(X)$ comme g préserve l'orthogonalité. l'image du petit axe (d) est (d)

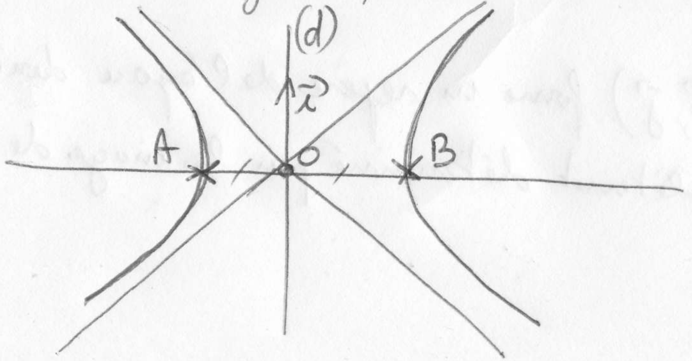
Notons C et D les points de $X \cap (d)$

(O, B, D) est un repère affine du plan donc les images de B et D par g déterminent g.

les images envisageables pour D sont D et C.
" " B " B et A.
et " " "

on trouve les réflexions d'axes (AB) et (d) l'identité et la symétrie de centre O.

6)



en identifiant le plan à $\mathbb{R}^2$ (grâce au choix d'un repère orthonormé direct) toute isométrie affine du plan est la somme d'une isométrie linéaire de $\mathbb{R}^2$ et d'une fct constante de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

En particulier toute isométrie affine est C^0.

L'image d'un connexe par arcs par une telle isométrie est un connexe par arcs. De même pour la préimage.

On en déduit que l'image d'une composante connexe est une composante connexe (essayez de le prouver)

Ici l'image d'une branche de l'hyperbole est encore une branche de l'hyperbole.

Soit A et B les sommets de X.

Soit $g \in Is(X)$ la distance $g(A)g(B)$ étant égale à AB et $g(A)$ et $g(B)$ appartenant à des branches différentes

on a $(g(A)=A$ et $g(B)=B)$ ou $(g(A)=B$ et $g(B)=A)$.

[la distance minimale entre deux points appartenant à des branches différentes n'étant atteinte qu'en prenant les deux sommets].

dans tous les cas, le ~~milieu~~ milieu O de [AB] est fixe.

Notons (d) la $\perp$ à (AB) passant par O et $\vec{\imath}$ un vecteur directeur de (d)

Comme g préserve l'orthogonalité $g(d) = (d)$.

Là encore, comme $(O, \overrightarrow{OB}, \vec{\imath})$ forme un repère

g est déterminée par l'image de B (ou celle de $\overrightarrow{OB}$ par $\vec{g}$ ce qui revient au m̂)

et par celle de $\vec{\imath}$.

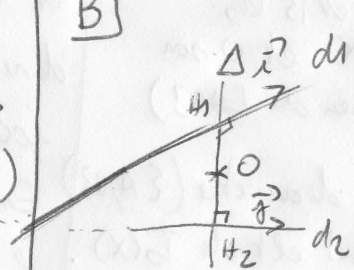
- si $g(B)=B$ et $\vec{g}(\vec{\imath})=\vec{\imath}$ on a $g = Id$
- si $g(B)=B$ et $\vec{g}(\vec{\imath})=-\vec{\imath}$ ~~on a~~ g est la reflexion d'axe (AB)
- si $g(B)=A$ et $\vec{g}(\vec{\imath})=\vec{\imath}$ g est la reflexion d'axe (d)
- si $g(B)=A$ et $\vec{g}(\vec{\imath})=-\vec{\imath}$ g est la symétrie de centre O.

Rq : pour 5) et 6) on peut par exemple justifier que la symétrie de centre O est bien dans $Is(X)$.

en remarquant de $M(x,y) \in X$ ssi $M'(-x,-y) \in X$.

idem pour les reflexion...

B)



soient d_1 et d_2 les d^tes non coplanaires tq $X = d_1 \cup d_2$

l'image d'une d^te étant une droite tout elt de $Is(X)$ envoie d_1 sur d_1 ou d_2 et d_2 sur d_2 ou d_1.

Soit Δ la perpendiculaire commune à d_1 et d_2.

soit $g \in Is(X)$, g preservant la perpendicularité l'image de Δ est Δ.

~~soient~~ soient H_1 et H_2 les p^ts d'intersection respectifs entre $(\Delta$ et $d_1)$ et $(\Delta$ et $d_2)$

comme $g(\{H_1, H_2\}) = \{H_1, H_2\}$ le milieu O de $[H_1 H_2]$ est fixe par g.

Soit $\vec{\imath}$ un vecteur unitaire directeur de d_1. et

" $\vec{\jmath}$ " " " d_2.

$(O, \overrightarrow{OH_1}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ forme un repère de l'espace donc

g est complètement déterminé par les images de H_1, $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

<u>cas 1</u> : supposons $g(H_1)=H_1$.

dans ce cas tous les points de Δ sont fixes et $g(d_1)=d_1$ et $g(d_2)=d_2$.

Les images possibles pour $\vec{i}$ sont $\vec{i}$ et $-\vec{i}$

" " " $\vec{j}$ " $\vec{j}$ et $-\vec{j}$.

* si d_1 et d_2 ne sont pas orthogonale les seuls cas où $\vec{g}(\vec{i}).\vec{g}(\vec{j})=\vec{i}.\vec{j}$ sont :

$\vec{g}(\vec{i})=\vec{i}$ et $\vec{g}(\vec{j})=\vec{j}$ avec $g=Id$.

et $\vec{g}(\vec{i})=-\vec{i}$ ~~et~~ $\vec{g}(\vec{j})=-\vec{j}$ avec g la ~~sy~~ symétrie orthogonale d'axe Δ.

* si d_1 et d_2 sont orthogonales les deux autres cas sont possibles et correspondent aux reflexions pour rapport ~~à~~ des plans contenant Δ et l'une des deux autre droite parmi d_1 et d_2.

<u>cas 2</u> : supposons maintenant $g(H_1)=H_2$.

dans ce cas $g(d_1)=d_2$ et $g(d_2)=d_1$.

les images possibles pour $\vec{i}$ sont $\vec{j}$ et $-\vec{j}$

" " " $\vec{j}$ " $\vec{i}$ et $-\vec{i}$.

* si d_1 et d_2 ne sont pas orthogonals les cas.

$(\vec{g}(\vec{i})=\vec{j}$ et $\vec{g}(\vec{j})=-\vec{i})$ et $(\vec{g}(\vec{i})=-\vec{j}$ et $\vec{g}(\vec{j})=\vec{i})$

ne sont pas possibles.

si $\vec{g}(\vec{i})=\vec{j}$ et $\vec{g}(\vec{j})=\vec{i}$ g est la composée de la reflexion de plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ et de la reflexion de plan contenant Δ et $\vec{i}+\vec{j}$.

<u>Rq</u>: g est donc dans ce cas une rotation d'axe $(O,\vec{i}+\vec{j})$ (l'intersection des deux plans des reflexions composant g)

si $\vec{g}(\vec{i})=-\vec{j}$ et $\vec{g}(\vec{j})=-\vec{i}$ g est la composée de la reflexion de plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ et de la reflexion de plan contenant Δ et $\vec{i}-\vec{j}$.

* si $d_1 \perp d_2$ il faut en plus des cas précédents en considerer deux autres :

~~les cas~~ $\vec{g}(\vec{i})=\vec{j}$ et $g(\vec{j})=-\vec{i}$ et $g(\vec{i})=-\vec{j}$ et $g(\vec{j})=\vec{i}$

correspondent à des anti-rotations obtenues par composition de la reflexion par rapport au plan passant par O et perpendiculaire à Δ et d'une rotation d'axe Δ d'angle egal à $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$.