Ondelettes de Haar et compression d'images

PARTIE A : ondelettes de Haar.

Notations :

Etant donné un intervalle borné $I = [a, b[$ on notera I^- l'intervalle $[a, \dfrac{a+b}{2}[$ et I^+ l'intervalle $[\dfrac{a+b}{2}, b[$

On note F l'ensemble des fonctions continues de $[0,1[$ dans $\mathbb{R}$ prologeables par continuité au point 1.

On rappelle que $\mathbb{R}^{[0,1[}$ désigne l'ensemble des fonctions de $[0,1[$ dans $\mathbb{R}$.

Pour un entier $N > 0$ et $k \in [\![0, 2^N - 1]\!]$ on note $I_k(N)$ l'intervalle $[\dfrac{k}{2^N}, \dfrac{k+1}{2^N}[$ de sorte que tous les intervalles $I_k(N)$ sont de longueur $\dfrac{1}{2^N}$ et que leur union disjointe soit égale à $[0,1[$.

Toujours pour $N \in \mathbb{N}^*$ on note E_N l'espace vectoriel des fonctions de $[0,1[$ dans $\mathbb{R}$ constantes sur chacun des intervalles $I_0(N), ..., I_{2^N-1}(N)$.

Pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, 2^N - 1]\!]$ on note $\phi_{N,k}$ la fonction indicatrice de $I_k(N)$ et $\psi_{k,N}$ la fonction égale à 1 sur $I_k^-(N)$, égale à -1 sur $I_k^+(N)$ et nulle sur le reste de l'intervalle $[0,1[$.

On pose $E = \bigcup\limits_{N \in \mathbb{N}^*} E_N$.

Enfin on pose $G = vect(F \cup E)$.

1) Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[0,1[}$.

2) Montrer que l'application $(f, g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur G. Désormais on muni G de ce produit scalaire.

3) Montrer que E est dense dans G.

4) Montrer que pour N fixé les $\phi_{k,N}$ forment une base B_N orthogonale de E_N.

5) Déterminer pour $f \in F$ l'élément de E_N le plus proche de f (en précisants les valeurs prises sur chacun des $I_k(N)$).

6) Montrer que pour N fixé, les $\psi_{k,N}$ complètent B'_N en une base orthogonale B_{N+1} de de E_{N+1} .

7) a)Soit $g \in E_{N+1}$, vérifiez que pour chaque valeur de $k \in [\![0, 2^N - 1]\!]$ g est constante sur $I_k^+(N)$ et $I_k^-(N)$.

On note respectivement g_k^+ et g_k^- les valeurs prises par g sur ces intervalles.

b) Exprimer les coordonnées de g dans la base B_{N+1} en fonction des g_k^+ et g_k^-.

8) Donner la matrice de passage de $B'3$ vers B_3.

PARTIE B : approche algébrique et compression d'image

INTRO : En informatique une image en niveaux de gris peut être assimilée à une matrice réelle dont chaque case contient une valeur correspondant à la teinte d'un pixel.
Dans les images courantes des pixels voisins sont souvent très similaires si bien deux cases contigues de la matrice contiennent presque la même valeur.
Ainsi on ne perd « pas grand chose »en remplaçant dans les deux cases voisines chaque valeur par la moyenne des deux valeurs.

Etudions cela de plus près :
On travaille dans $\mathbb{R}^{2n}$ (avec $n > 0$ entier)
Considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^{2n}$ défini par :

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{2n-1} \\ x_{2n} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ \dfrac{x_3 + x_4}{2} \\ \vdots \\ \dfrac{x_{2n-1} + x_{2n}}{2} \\ \dfrac{x_1 - x_2}{2} \\ \vdots \\ \dfrac{x_{2n-1} - x_{2n}}{2} \end{pmatrix}$$

.
RQ : Cette application correspond en quelque sorte à partir d'un $2n$ uplet , à regrouper les coordonnées deux par deux, puis à mettre en colonne d'abord toutes les moyennes puis toutes les demis différences.

1) Montrer que f est une similitude dont on déterminera la rapport.
Que dire de f^{-1} ?

2) Soit $X \in \mathbb{R}^{2n}$ et $Y = f(X)$. On suppose que Y' est élément de $\mathbb{R}^{2n}$ tq $\|Y - Y'\|_\infty < \epsilon$ avec $\epsilon > 0$.
Majorez $\left\|X - f^{-1}(Y')\right\|_2$ et $\left\|X - f^{-1}(Y')\right\|_\infty$.

3) On note W la matrice de f dans la base canonique.
Comparez ${}^tW$ et W^{-1}.

POUR FINIR (voici le procédé de compression)
Pour une image représentée par une matrice M, $2nn$, on calcule $S = WM^tW$.
Ensuite les coefficients de S inférieurs à un $\epsilon > 0$ choisi sont remplacés par 0 et on stocke la matrice S' obtenue. Quelle formule permet de retrouver une approximation de S à partir de S' ?
Rq : si n est pair on peut reproduire la procédé (avec moyennes et différences) sur les n premières coordonnées de $f(X)$