QUADRIQUES,CONIQUES,ISOMETRIES, REDUCTION, ETC....

Notions abordées : coniques, quadriques, automorphismes orthogonaux, réduction des matrices symétriques en base orthonormée, isométries affines.

EXERCICE 1(gozard MP* Maths, 6.9) :
Soit $A = (a_{i,j}) \in O(n)$.

Montrer que $\left|\sum_{i,j} a_{i,j}\right| \leq n$.

EXERCICE 2(gozard MP* Maths, 6.8) :
Soit E un ev euclidien et $f \in L(E)$ conservant l'orthogonalité.
a) Montrer que si $a, b \in E$ sont unitaires alors $a + b$ et $a - b$ sont orthogonaux.
b) En déduire que si x, y sont des vecteurs non nuls, $\dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \dfrac{\|f(y)\|}{\|y\|}$
c) Montrer que f est une similitude (composée d'une isométrie et d'une homothétie).

EXERCICE 3 (inspiré partiellement de gozard 6.12)
1) La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1,5 & 3 \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ est elle orthogonale ?
2) Montrer que A est le produit d'une matrice diagonale D à coeffs diagonaux positifs et d'une matrice orthogonale A' qu'on déterminera.
3) En déduire A^{-1}.
4) Caractériser géométriquement l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A'.
5)(« exercices de mathématiques X :ENS algèbre/géomtrie II »exoC.2)
Montrer que pour tout endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ il existe une base $e_1, .., e_n$ telle que $f(e_1), .., f(e_n)$ est orthogonale.

EXERCICE 4 : (inspiré de audin II.22) :
a) Montrer que tout endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$ qui commute avec tous les éléments de $O(n)$ préserve les droites.
b) Montrer que tout endomorphisme de E préservant les droites est une homothétie et en déduire le centre de $O(n)$.
c) qu'en est il si on remplace $O(n)$ par $O^+(n)$ dans la question ?

EXERCICE 5 :
1) Etudier la quadrique d'équation $z = x^2 + xy + y^2$ et tracer son allure.
2) Etudier localement en $(0, 0)$ la fonction de deux variables réelles $(x, y) \mapsto (x + y)sh(x) + y^2$.

EXERCICE 6 :
a) Etudier la conique d'équation $1 = x^2 + xy + y^2$
b) Déterminer les isométries affines laissant cette conique invariante.
c) Déterminer les isométries affines laissant invariante l'union de deux droites (traiter tous les cas).
d) Déterminer le groupe des isométries affines du triangle équilatéral (identifié à la réunion de ses

sommets).

EXERCICE 7 (inspiré de « Géométrie », M.AUDIN II.23)
Montrer que tout automorphisme u de $\mathbb{R}^n$ est le produit d'un automorphisme trigonalisable à valeurs propres positives et d'un automorphisme orthogonal (aide : on appliquera le procédé de schmidt à $u(B)$ où B désigne la base canonique).

EXERCICE 8
1) Diagonalisez $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, calculez B^n, B^{-1} et $exp(B)$.
2) Etudier les suites définies par la récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u(n+1) \\ v(n+1) \end{pmatrix} = B \times \begin{pmatrix} u(n) \\ v(n) \end{pmatrix}$ et $u(0) = v(0) = 1$
3) Résourdre le système différentiel $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = B \times \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.