Espaces prehilbertiens, espaces euclidiens

18 novembre 2015

prérecquis : projection et distance euclidienne, théorème de weierstrass, matrices symétriques réelles et adjoint d'un endomorphisme d'ev euclidien.

EXERCICE 0 (forme hermitienne et forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne associée)
Soit E un $\mathbb{C}$ ev de dimension n (non nulle) et $B = \{e_1, ..., e_n\}$ une base E.
On rappelle que pour une forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne ϕ on appelle matrice de la matrice M de terme général $(\phi(e_i, e_j))$.
On a les relations $M^* = M$ et pour $x, x' \in E, \phi(x, y) = X^*MX'$ avec X et X' les colonnes des coordonnées de x et x'.
(Ici, étant donné une matrice A, A^* désigne la conjuguée de la transposée de A)

1)a) En exploitant les rappels ci dessus, retrouver la forme générale des formes sesquilinéaires à symétrie hermitienne dans le cas où $E = \mathbb{C}^3$.
(Remarquez que seules les coordonnées de x sont "conjuguées".

2) On considère les application de $\mathbb{C}^3$ dans $\mathbb{C}$ suivantes :

$$\phi : (x_1, x_2, x_3) \mapsto |x_1|^2 + |x_2|^2 - |x_3|^2 + i\overline{x_1}x_3 - i\overline{x_3}x_1 + \overline{x_2}x_3 + \overline{x_3}x_2$$

et

$$\psi : (x, y, z) \mapsto |x|^2 - 2|y|^2 + (i+1)\overline{x}z + (1-i)\overline{z}x + \overline{x}y + \overline{y}x.$$

Montrer que ce sont des formes hermitiennes en exhibant leurs forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne associée.

EXERCICE I (petit pb de géométrie plane)
dans le plan euclidien repéré on considère trois points $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$ deux à deux distincts et $M(x, y)$ un point du plan.

1) Montrer que la quantité $d_M = AM^2 + BM^2 + CM^2$ peut s'interpretter comme le carré d'une distance dans $\mathbb{R}^6$.

2) En déduire que la fonction $M \mapsto d_M$ atteint son minimum en un unique point dont on précisera les coordonnées en fonction de celles de A, B et C.

EXERCICE II (autre petit pb de géométrie plane)
On considère le point $M(x, y)$, les droites d_1, d_2 et d_3 du plan d'équations respectives

$x+y-\sqrt{2}=0$, $y-\sqrt{3}x+1=0$ et $x-\sqrt{3}y=2$ et la quantité d_M somme des carrés des distances de M à d_1, d_2 et d_3.
On considère enfin trois réels a, b, c (avec $(a,b) \neq (0,0)$) et la droite d d'équation $ax+by+c=0$.

1) Montrer que la distance de M à d vaut $\left|\dfrac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$.

2) Interpretter d_M comme la norme euclidienne d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

3) Determiner la valeur des coordonnées de M qui minimisent d_M.

EXERCICE III
Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$ on note f_k la fonction $x \mapsto (sin(kx))$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ Montrer que la famille $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est libre.

EXERCICE IV Soit G l'espace des fonctions continues de $[-1,1]$ et l'endomorphisme $p : f \mapsto f(0)$ de G ($f(0)$ étant assimilé à une fonction constante). Considérons également $E = \mathbb{R}[X]$.

1) Montrer que l'application $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$ est un produit scalaire sur G

2) Vérifier que l'application de E dans G qui à un polynôme P associe la restriction à $[-1,1]$ de la fonction polynômiale associée à P est une injection linéaire.
Cette injection permet alors d'assimiler E à un sev de G, ce que nous ferons par la suite.

3) Déterminer la projection orthogonale de la fonction sinus sur $\mathbb{R}_1[X]$

4) Montrer que $E^\perp = \emptyset$.

5) Soit $f \in G$. On considère la suite (P_n) de polynômes obtenue à partir de la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ par orthonormalisation de schmidt.
Ainsi, entre autres choses, $\forall n \in \mathbb{N},\ deg(P_n) = n$.
Pour chaque entier n on note a_n la quantité $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(t)f(t)dt$.

a)Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} f^2(t)dt = \sum_{k=0}^{+\infty} {a_n}^2$.

b)Peut on parler de projection orthogonale sur E ?

6) Montrer que p est un projecteur. Est il orthogonal ?

EXERCICE V (probabilités finies et produit scalaire)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On considère un ensemble $\Omega = \{x_1, ..., x_n\}$ muni de la probabilité uniforme.
Considérons l'ensemble E des variables aléatoires réelles sur Ω muni de la somme et

de la multiplication par un scalaire usuelles.
Pour $i \in \{1, .., n\}$ et pour une Variable Aléatoire X, on notera X_i la quantité $X(x_i)$, $\overline{X}$ l'espérence de X et $\sigma(X)$ son écart type.
Par ailleurs les VA constante seront, comme d'habitude, confondues avec l'unique valeur qu'elles prennent.

1) Vérifier que E est un $\mathbb{R}$ ev de dimension n.
On note F le sev de E formé par les VA constantes et on définit sur E le produit scalaire $(X, Y) \mapsto \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_i Y_i$.

2) Soit $X \in E$. Montrer que la distance de X à F est égale à la $\sigma(X)^2$.

3) Si X et Y sont deux éléments de E on considère le nuage de points associé :

$$M_1 = (X_1, Y_1),\ M_2 = (X_2, Y_2),\ \dots\ ,\ M_n = (X_n, Y_n).$$

On cherche la droite (d) d'équation $y = ax + b$ (on suppose que les points $M_1, .., M_n$ ne sont pas alignés verticalement) qui minimise la quantité $\sum_{i=1}^{n} (Y_i - (aX_i + b))^2$.
Cette droite est appelée droite des moindres carrés.

a) Interpretter la situation en termes de projection orthogonale et prouver qu'il existe bien une unique droite d solution du problème.

b) Montrer que 1 et $\frac{X - \overline{X}}{\sigma(X)}$ forment une base orthonormée de $vect(1, X)$.

c) En réecrivant $Y_i - (aX_i + b)$ sous la forme $(Y_i - \overline{Y}) - (a(X_i - \overline{X}) + b')$ montrer que $b' = 0$ et $a = \frac{< Y - \overline{Y} / X - \overline{X} >}{\sigma^2(X)}$.

EXERCICE VI (auto-adjoint)
Soit E un ev euclidien de dimension n et B une base orthonormée de E.Soit p un endomorphisme de E et p^* l'adjoint de p.

1) Montrer que si F est un sev stable par p et $F^\perp$ stable par p^*

2) Montrer p et p^* ont le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal.

3) Dans cette question on suppose que p est un projecteur.
Montrer que p est orthogonal si et seulement si p est auto-adjoint.

EXERCICE VI (reduction)

réduire l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ en base orthonormée (pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$).