4.2.2 Solution de la deuxième épreuve écrite

On utilisera librement la remarque suivante :

Remarque. Soient I un intervalle ouvert $a \in \mathrm{I}$ et $g, h : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ des fonctions, et $\lambda \in \mathbf{R}^*$. On suppose que g est dérivable au sens généralisé en a et h est dérivable (vraiment) en a. Alors λg et $g+h$ sont dérivables au sens généralisé en a et l'on a

$$(\lambda g)'(a) = \lambda g'(a) \quad \text{et} \quad (g+h)'(a) = g'(a) + h'(a)$$

avec les conventions

$$\lambda \pm \infty = \pm\infty \text{ si } \lambda > 0, \quad \lambda \pm \infty = \mp\infty \text{ si } \lambda < 0 \quad \text{et} \quad \pm\infty + x = \pm\infty \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

I. La fonction racine cubique

A. Dérivées au sens généralisé.

1. L'application g^{-1} est continue et strictement croissante comme réciproque d'une application continue strictement croissante. Soit $a \in \mathrm{J}$. Posons $b = g^{-1}(a)$. Pour $y \in \mathrm{I}$ distinct de b posons $h(y) = \dfrac{g(y)-g(b)}{y-b}\cdot$ Pour $x \in \mathrm{J}$ distinct de a, on a $\dfrac{g^{-1}(x)-g^{-1}(a)}{x-a} = \dfrac{1}{h \circ g^{-1}(x)}\cdot$
   Puisque g^{-1} est continue en a et h admet la limite $g'(b)$ en b, la fonction $h \circ g^{-1}$ admet en a la limite $g'(b)$. Comme la fonction g est strictement croissante, la fonction h prend ses valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$, donc $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{1}{h\circ g^{-1}(x)} = \frac{1}{g'(b)}$ avec les conventions $\dfrac{1}{0} = +\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty} = 0$.
2. (a) Si g admet un maximum local en c, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$, on ait $x \in \mathrm{I}$ et $g(x)-g(c) \le 0$. Alors, pour $x <\in]c-\varepsilon, c[$, on a $\dfrac{g(x)-g(c)}{x-c} \ge 0$ et pour $x \in]c, c+\varepsilon[$, on a $\dfrac{g(x)-g(c)}{x-c} \le 0$. On a :
   $g'(c) = \displaystyle\lim_{x\to c,\ x<c} \frac{g(x)-g(c)}{x-c}$, donc $g'(c) \in \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$;
   $g'(c) = \displaystyle\lim_{x\to c,\ x>c} \frac{g(x)-g(c)}{x-c}$, donc $g'(c) \in \mathbf{R}_- \cup \{-\infty\}$.
   Il vient $g'(c) = 0$.

   (b) Posons $u = \dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}$ et, pour $x \in \mathrm{I}$, $h(x) = g(x) - ux$. La fonction h est dérivable au sens généralisé, pour $x \in \mathrm{I}$ on a on a $h'(x) = g'(x) - u$ (avec la convention $\pm\infty - u = \pm\infty$) et $h(a) = h(b)$. Nous devons démontrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $h'(c) = 0$.

   Comme la fonction h est continue sur le segment $[a,b]$ elle y est bornée et y atteint ses bornes. Posons $m = \inf\{h(x);\ x \in [a,b]\}$ et $\mathrm{M} = \sup\{h(x);\ x \in [a,b]\}$. Si $m = \mathrm{M}$, alors h est constante sur $[a,b]$, et on trouve $h'(c) = 0$ pour tout $c \in [a,b]$. Sinon, m et M ne peuvent être tous deux égaux à $h(a)$; quitte à changer g en $-g$, on peut supposer que $\mathrm{M} \ne h(a)$. Comme le « sup » est atteint, il existe $c \in [a,b]$ tel que $h(c) = \mathrm{M}$; comme $h(b) = h(a) < \mathrm{M}$, il vient $c \in]a,b[$. Alors h atteint un maximum local en c, donc $h'(c) = 0$ d'après (a).
3. (a) D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in \mathrm{J}_x$ tel que $g'(c) = \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}\cdot$
   Donc $\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} \in \{g'(y);\ y \in \mathrm{J}_x\}$ et en particulier $\inf\{g'(y);\ y \in \mathrm{J}_x\} \le \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} \le$ $\sup\{g'(y);\ y \in \mathrm{J}_x\}$ (ces bornes étant bien sûr prises dans $\overline{\mathbf{R}}$).

(b) Pour $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, posons $V_\alpha =]a-\alpha, a[\cup]a, a+\alpha[$. Par hypothèse, pour tout intervalle ouvert U de $\overline{\mathbf{R}}$ contenant ℓ, il existe $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ tel que, pour $y \in V_\alpha$ on ait $f'(y) \in U$; pour $x \in V_\alpha$, on a $J_x \subset V_\alpha$; on a alors $\inf\{g'(y);\ y \in J_x\} \in \overline{U}$ et $\sup\{g'(y);\ y \in J_x\} \in \overline{U}$. Cela démontre que $\inf\{g'(y);\ y \in J_x\}$ et $\sup\{g'(y);\ y \in J_x\}$ tendent vers ℓ (dans $\overline{\mathbf{R}}$) lorsque x tend vers a. D'après (a) et en utilisant le théorème des « encadrements », on trouve $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} = \ell$. Autrement dit g est dérivable au sens généralisé en a et $g'(a) = \ell$.

B. La fonction racine cubique

1. (a) Posons $g(x) = x^3$. La fonction g est strictement croissante, dérivable et bijective de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$. D'après 1.(a), sa fonction réciproque f est dérivable au sens généralisé. En particulier, on a $f'(0) = \dfrac{1}{g'(f(0))} = \dfrac{1}{0} = +\infty$.

   (b) Pour $s \in \mathbf{R}^*$, on a $f'(s) = \dfrac{1}{g'(f(s))} = \dfrac{|s|^{-2/3}}{3}\cdot$ La fonction f' est paire et strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$, on a donc $f'(s) \le f'(t) \iff f'(|s|) \le f'(|t|) \iff |s| \ge |t|$.

   (c) La fonction $g : x \mapsto f(x+a) - f(x-a)$ est continue sur $\mathbf{R}$, dérivable en tout point x distinct de $\pm a$, et l'on a $g'(x) = f'(x+a) - f'(x-a)$. Pour $x < 0$, on a $|x+a| < |x-a|$ donc $f'(x+a) > f'(x-a)$; donc g est croissante sur $]-\infty, -a[$ et sur $]-a, 0[$; pour $x > 0$, on a $|x+a| > |x-a|$ donc $f'(x+a) < f'(x-a)$; donc g est décroissante sur $]0, a[$ et sur $]a, +\infty[$. La fonction g atteint donc son maximum en 0.

   (d) Si $x = y$ il n'y a rien à démontrer ; sinon, posons $a = \left|\dfrac{x-y}{2}\right|$ et $z = \dfrac{x+y}{2}$ de sorte que $x = z+a$ et $y = z-a$ ou $x = z-a$ et $y = z+a$; comme f est croissante, on a $|f(x) - f(y)| = |f(z+a) - f(z-a)| = f(z+a) - f(z-a)$; comme f est impaire on a $f(a) - f(-a) = 2\left|f\left(\dfrac{x-y}{2}\right)\right|$. La question (c) donne donc $|f(x)-f(y)| \le 2\left|f\left(\dfrac{x-y}{2}\right)\right|$.

   (e) Soit $\varepsilon > 0$; comme f est continue en 0, il existe α tel que pour tout $z \in \mathbf{R}$ tel que $|z| < \alpha$ on ait $|f(z)| < \varepsilon$. D'après (d), on trouve que si $|x-y| < 2\alpha$, $|f(x) - f(y)| < 2\varepsilon$. Donc f est uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

2. (a) Pour tout $x, y \in \mathbf{R}^2$, on a $\dfrac{1}{4}x^2 + xy + y^2 = \left(y + \dfrac{x}{2}\right)^2 \ge 0$, donc $x^2 + xy + y^2 \ge \dfrac{3}{4}x^2$.

   (b) Soient $x_0, x \in \mathbf{R}$ tels que $x_0 \ne 0$ et $x \ne x_0$. Posons $y = f(x)$ et $y_0 = f(x_0)$. On a
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{y^3 - y_0^3} = \frac{1}{y_0^2 + y_0 y + y^2}.$$
D'après (a), on a on a $y_0^2 + y_0 y + y^2 \ge \dfrac{3}{4}y_0^2 > 0$, donc $0 < \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le \dfrac{4}{3y_0^2}\cdot$ Or $f'(x_0) = \dfrac{1}{3y_0^2}$, donc $0 < \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 4f'(x_0)$.

C. Construction d'une suite dense.

1. (a) La fonction g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $g'(t) = \cos t - t\sin t$. Puisque f est dérivable sur $\mathbf{R}^*$, la fonction $g \circ f$ est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ et pour $t \ne 0$, on a $(g\circ f)'(t) = f'(t)g'(f(t))$. Or $\lim\limits_{t\to 0} f'(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to 0} g'(f(t)) = g'(f(0)) = 1$, donc $\lim\limits_{t\to 0}(g\circ f)'(t) = +\infty$. D'après A.3.(b), cela implique que $g \circ f$ est dérivable au sens généralisé en 0 et $(g\circ f)'(0) = +\infty$.

   (b) Remarquons que pour $x \ne 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{3f(x)^2}$, de sorte que $(g\circ f)'(x) = h(f(x))$, où l'on a posé $h(t) = \dfrac{g'(t)}{3t^2} = \dfrac{\cos t}{3t^2} + \dfrac{\sin t}{t}\cdot$ Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = 0$, il vient $\lim\limits_{x\to+\infty}(g\circ f)'(x) = 0$.

2. (a) Pour $k \in \mathbf{N}$, on a $g(k\pi) = (-1)^k k\pi$ et $g((k+1)\pi) = (-1)^{k+1}(k+1)\pi$. Si $x \in \mathbf{R}$ satisfait $k\pi \geq |x|$, alors x est dans le segment d'extrémités $g(k\pi)$ et $g((k+1)\pi)$. Puisque g est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un nombre $y(k,x) \in [k\pi, (k+1)\pi]$ tel que $g(y(k,x)) = x$. Or $g((k+1)\pi) \neq x$, donc $y(k,x) \in [k\pi, (k+1)\pi[$

   (b) On a $a_{n_k} - x = (g \circ f)(n_k) - (g \circ f)(y(k,x)^3)$ de sorte qu'il existe $z_k \in [n_k, y(k,x)^3]$ tel que $a_{n_k} - x = (n_k - y(k,x)^3)(g \circ f)'(z_k)$. Lorsque $k \to +\infty$, puisque $y(k,x) \geq k\pi$ et $z_k \geq y(k,x)^3 - 1$, il vient $z_k \to +\infty$, donc $(g \circ f)'(z_k) \to 0$. Comme $|n_k - y(k,x)^3| < 1$, il vient $\lim\limits_{k \to +\infty} a_{n_k} - x = 0$.

3. Soit $x \in \mathbf{R}$. Par la question précédente, il existe une suite (n_k) de nombres entiers naturels telle que $\lim\limits_{k \to +\infty} a_{n_k} = x$; donc x est adhérent à $\{a_n;\ n \in \mathbf{N}\}$. Cela étant vrai pour tout x, l'adhérence de $\{a_n;\ n \in \mathbf{N}\}$ est $\mathbf{R}$, autrement dit $\{a_n;\ n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

4. Rappelons que pour tout nombre réel $\alpha > 1$, la série de terme général $(n^{-\alpha})$ converge. Comme $0 < \lambda_n < n^{-2}$ la série de terme général (λ_n) converge. On a $|a_n| \leq n^{1/3}$, donc $|f(a_n)| \leq n^{1/9}$, donc $|\lambda_n f(a_n)| \leq n^{-\alpha}$ avec $\alpha = 2 - 1/9$. On en déduit que la série de terme général $(\lambda_n f(a_n))$ est absolument convergente donc convergente.

II. Construction de la fonction *F*

1. ***Construction.***

   (a) Remarquons d'abord que la série de terme général $\lambda_n f(-a_n) = -\lambda_n f(a_n)$ converge par hypothèse. Soit $\mathrm{M} \in \mathbf{R}_+$. Pour $|x| \leq \mathrm{M}$, on a $|f(x - a_n) - f(-a_n)| \leq 2|f(x/2)|$ d'après la question B.1.(d). Donc $|\lambda_n(f(x-a_n) - f(-a_n))| \leq 2^{2/3}\mathrm{M}^{1/3}\lambda_n$. Il s'ensuit que la série de fonctions de terme général $\lambda_n(f(x - a_n) - f(-a_n))$ converge normalement sur l'intervalle $[-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$. Il en résulte que la série de fonctions de terme général $x \mapsto \lambda_n f(x - a_n)$ converge uniformément sur $[-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$. Si K est un compact de $\mathbf{R}$, il est borné donc contenu dans un intervalle de la forme $[-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$. Il en résulte que la série de fonctions de terme général $x \mapsto \lambda_n f(x - a_n)$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbf{R}$.

   (b) Soient $x, y \in \mathbf{R}$ tels que $x < y$. Alors $\mathrm{F}(y) - \mathrm{F}(x)$ est somme des nombres strictement positifs $\lambda_n\big(f(y - a_n) - f(x - a_n)\big)$ (vu que f est strictement croissante et les λ_n sont strictement positifs) donc est strictement positif. Ainsi, la fonction F est strictement croissante. Sa restriction à chaque compact de $\mathbf{R}$ est continue comme somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues. Donc F est continue.

   (c) Posons $\mathrm{G}(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lambda_n f(x - a_n)$. De même que F, la fonction G est strictement croissante. Pour $x > a_0$, on a $\mathrm{G}(x) > \mathrm{G}(a_0)$, donc $\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(a_0) = \lambda_0 f(x - a_0) + \mathrm{G}(x) - \mathrm{G}(a_0) > \lambda_0 f(x - a_0)$; pour $x < a_0$, on trouve de même $\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(a_0) = \lambda_0 f(x - a_0) + \mathrm{G}(x) - \mathrm{G}(a_0) < \lambda_0 f(x - a_0)$.

   (d) On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x - a_0) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x - a_0) = -\infty$. Comme pour $x > a_0$ on a $\mathrm{F}(x) > \mathrm{F}(a_0) + \lambda_0 f(x - a_0)$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{F}(x) = +\infty$. De même $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{F}(x) = -\infty$

   (e) L'application F est strictement croissante donc injective ; comme elle est continue, son image est un intervalle ; par (d) elle n'est ni majorée ni minorée, donc son image est $\mathbf{R}$. En d'autres termes elle est surjective, donc bijective.

2. Pour $x, x_0 \in \mathbf{R}$ tels que $x \neq x_0$, on a $\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \lambda_k(f(x - a_k) - f(x_0 - a_k))$, donc

$$\frac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0)}{x - x_0} = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0}.$$

Or, comme f est croissante, cette série est à termes positifs, donc sa somme majore ses sommes partielles. Autrement dit, pour $n \in \mathbf{N}$ on a

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x-a_k)-f(x_0-a_k)}{x-x_0} \leq \frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(x_0)}{x-x_0}.$$

3. Comme $f'(0)=+\infty$, on a $\lim_{x\to a_n} \frac{f(x-a_n)}{x-a_n} = +\infty$. Or

$$\lambda_n \frac{f(x-a_n)}{x-a_n} \leq \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x-a_k)-f(a_n-a_k)}{x-a_n} \leq \frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(a_n)}{x-a_n}.$$

Donc $\lim_{x\to a_n} \frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(a_n)}{x-a_n} = +\infty$. Donc F est dérivable au sens généralisé en a_n et $\mathrm{F}'(a_n)=+\infty$.

4. (a) Soit $n \in \mathbf{N}$. La fonction $g : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x-a_k)$ est dérivable en x_0 et sa dérivée vaut $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x-a_k)$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, si $0 < |x-x_0| < \varepsilon$, alors $\left|\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} - g'(x_0)\right| \leq 1$ et en particulier $1 + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x-a_k)-f(x_0-a_k)}{x-x_0} \geq \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x-a_k)$.

(b) Soit $\mathrm{M} \in \mathbf{R}_+$. Comme la série de terme général (positif) $(\lambda_n f'(x_0-a_n))$ est supposée divergente, il existe n tel que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x-a_k) \geq \mathrm{M}+1$. Par (a), il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$ satisfaisant $0 < |x-x_0| < \varepsilon$, on ait $1 + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x-a_k)-f(x_0-a_k)}{x-x_0} \geq \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x-a_k)$; dans ce cas, on a

$$\frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(x_0)}{x-x_0} \geq \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x-a_k)-f(x_0-a_k)}{x-x_0} \geq -1 + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x_0-a_k) \geq \mathrm{M}.$$

Cela démontre que $\lim_{x\to x_0} \frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(x_0)}{x-x_0} = +\infty$, autrement dit que F est dérivable au sens généralisé en x_0 et $\mathrm{F}'(x_0) = +\infty$.

5. (a) Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $x \neq x_0$, on a d'après I.B.2.(b)

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k \frac{f(x-a_k)-f(x_0-a_k)}{x-x_0} \leq 4 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0-a_k),$$

soit

$$\frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(x_0)}{x-x_0} \leq \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x-a_k)-f(x_0-a_k)}{x-x_0} + 4 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0-a_k).$$

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Comme la série de terme général $\lambda_n f'(x_0-a_n)$ est convergente, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0-a_k) < \varepsilon/4$. Posons $\beta = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0-a_k)$ et notons g l'application $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x-a_k)$. L'application g est dérivable en x_0 et $g'(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x_0-a_k)$, il existe donc $\alpha > 0$ tel que pour $x \in \mathbf{R}$ satisfaisant $0 < |x-x_0| < \alpha$ on ait $\left|\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} - g'(x_0)\right| \leq \varepsilon/4$. Alors d'après les questions 2. et 5.(a) on a

$$\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} + 4\beta.$$

Posons $\ell = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0 - a_k) = g'(x_0) + \beta$. On a

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \geq g'(x_0) - \varepsilon/4 \geq \ell - \varepsilon/2,$$

et

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + 4\beta \leq g'(x_0) + \varepsilon/4 + 4\beta = \ell + \varepsilon/4 + 3\beta \leq \ell + \varepsilon.$$

Il vient $\ell - \varepsilon/2 \leq \dfrac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0)}{x - x_0} \leq \ell + \varepsilon$.

On a donc démontré que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbf{R}$ satisfaisant $0 < |x - x_0| < \alpha$, on ait

$$\left|\frac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0)}{x - x_0} - \ell\right| \leq \varepsilon.$$

Donc F est dérivable en x_0 et $\mathrm{F}'(x_0) = \ell$.

6. D'a près les questions 3, 4 et 5, la fonction F est dérivable au sens généralisé en tout point de $\mathbf{R}$. D'après la question I.A.1. la fonction réciproque F^{-1} de F est dérivable au sens généralisé en tout point de $\mathbf{R}$; de plus, pour $x \in \mathbf{R}$, si $\mathrm{F}'(x) \neq +\infty$, alors $\mathrm{F}'(x) \geq \lambda_0 f'(x - a_0) > 0$, donc F' ne s'annule pas. Donc $(\mathrm{F}^{-1})'$ est partout fini. En d'autres termes F^{-1} est dérivable en tout point de $\mathbf{R}$.

III. Parties denses de R

A. Intersections d'ouverts denses.

1. (a) Démontrons l'existence de u_n et v_n par récurrence sur n . Comme V_0 est ouvert et dense et I est ouvert et non vide, l'ensemble $\mathrm{V}_0 \cap \mathrm{I}$ est ouvert dans $\mathbf{R}$ et non vide, donc il contient un segment $[u_0, v_0]$.

   Supposons u_n et v_n construits. Comme V_{n+1} est ouvert et dense et $]u_n, v_n[$ est ouvert et non vide, l'ensemble $\mathrm{V}_{n+1} \cap]u_n, v_n[$ est ouvert et non vide, donc il contient un segment $[u_{n+1}, v_{n+1}]$.

   (b) La suite u_n est croissante et la suite v_n est décroissante. Comme $u_n < v_n < v_0$ la suite u_n est majorée donc convergente. Soit u sa limite. De même la suite v_n est décroissante et minorée donc convergente. Soit v sa limite. Comme pour tout n on a $u_n < v_n$, il vient $u \leq v$. Comme u_n est croissante et v_n décroissante, on a $u_n \leq u \leq v \leq v_n$. Donc pour tout n , on a $u \in [u_n, v_n]$. En particulier $u \in [u_0, v_0]$ donc $u \in \mathrm{I}$ et $u \in [u_n, v_n] \subset \mathrm{V}_n$. Donc $u \in \mathrm{I} \cap \mathrm{B}$. Cela prouve que $\mathrm{I} \cap \mathrm{B}$ n'est pas vide.

2. Comme l'ensemble B rencontre tout ouvert non vide de $\mathbf{R}$, il est dense dans $\mathbf{R}$.

3. L'ensemble $\mathrm{V}'_n = \mathrm{V}_n \cap \mathbf{R} - \{x_n\}$ est ouvert et dense, donc $\mathrm{B}' = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \mathrm{V}'_n$ est dense dans $\mathbf{R}$. Or $\mathrm{B}' = \mathrm{B} - \{x_n,\ n \in \mathbf{N}\}$.

B. Parties contenant des « gros compacts »

1. (a) Comme $c_k \in \mathrm{I}_k$, les ouverts I_k recouvrent C . Comme C est compact, un nombre fini de I_k recouvrent C , donc il existe un nombre $n \in \mathbf{N}$ tel que $\mathrm{C} \subset \bigcup_{k=0}^{n} \mathrm{I}_k$.

   (b) Pour $k \in \mathbf{N}$, notons $h_k : x \mapsto \max(0, \alpha_k - |x - c_k|)$; posons $h = \sum_{k=0}^{n} h_k$. La fonction h est continue et positive et l'ensemble des points en lesquels elle n'est pas nulle est $\bigcup_{k=0}^{n} \mathrm{I}_k$. En particulier, elle ne s'annule pas sur C. Posons $m=\inf\{h(x);\ x\in \mathrm{C}\}$. Comme C est compact, cet « inf » de la fonction h est atteint, donc $m>0$. Posons alors $g(x)=\min\Big(1,\dfrac{h(x)}{m}\Big)$. La fonction g est continue et

– pour tout $x\in \mathrm{C}$, on a $h(x)\geq m$, donc $g(x)=1$;

– pour tout $x\notin \bigcup_{k=0}^{n}\mathrm{I}_k$, on a $h(x)=0$, donc $g(x)=0$.

Notons χ_k la fonction qui vaut 1 sur I_k et 0 ailleurs et $\varphi=\sum_{k=0}^{n}\chi_k$. La fonction φ est en escalier ; pour $x\notin \bigcup_{k=0}^{n}\mathrm{I}_k$ on a $g(x)=\varphi(x)=0$; pour $x\in \mathrm{I}_k$; on a $g(x)\leq 1=\chi_k(x)\leq\varphi(x)$. Donc $g\leq\varphi$. Or $\int_a^b\chi_k(t)dt\leq\int_{-\infty}^{+\infty}\chi_k(t)dt=2\alpha_k$. On trouve

$$\int_a^b g(t)\,dt\leq\int_a^b\varphi(t)\,dt=\sum_{k=0}^{n}\int_a^b\chi_k(t)dt\leq\sum_{k=0}^{n}2\alpha_k<\varepsilon.$$

2. (a) Soient $a,b\in\mathbf{R}$ tels que $a<b$. Par hypothèse, il existe un compact $\mathrm{C}\subset \mathrm{A}\cap[a,b]$ et $\varepsilon>0$ tels que pour toute fonction continue $g:[a,b]\to[0,1]$ satisfaisant $g(x)=1$ pour tout $x\in \mathrm{C}$ on ait $\int_a^b g(t)\,dt\geq\varepsilon$. D'après 1, C n'est pas dénombrable, donc $\mathrm{A}\cap[a,b]$ non plus.

   (b) Soit D une partie dénombrable de A. Soit U un ouvert non vide de $\mathbf{R}$; il contient un segment $[a,b]$ avec $a<b$. Comme $[a,b]\cap \mathrm{A}$ n'est pas dénombrable, l'intersection $[a,b]\cap \mathrm{A}$ n'est pas contenue dans D, donc $(\mathrm{A}-\mathrm{D})\cap \mathrm{U}\neq\emptyset$. Cela démontre que l'ensemble $\mathrm{A}-\mathrm{D}$ est encore dense dans $\mathbf{R}$.

IV. Les points de pente infinie

A. Densité des points de pente infinie.

1. (a) Pour tout $x\in\mathbf{R}$ et tout $n\in\mathbf{N}$, on a $0\leq\lambda_n g_{\mathrm{T}}(x-a_n)\leq\lambda_n\mathrm{T}$. Comme la série de terme général $\lambda_n\mathrm{T}$ est convergente, la série de fonctions de terme général $x\mapsto\lambda_n g_{\mathrm{T}}(x-a_n)$ est normalement convergente. En particulier la série de terme général $\lambda_n g_{\mathrm{T}}(x-a_n)$ converge.

   (b) On a $g_{\mathrm{T}}(0)=\mathrm{T}$ et, pour $x\in\mathbf{R}^*$, on a $g_{\mathrm{T}}(x)=\inf\Big(\mathrm{T},\dfrac{|x|^{-2/3}}{3}\Big)$. La fonction g_{T} est continue sur $\mathbf{R}^*$ (comme « inf » de deux fonctions continues) et égale à T au voisinage de 0 : elle est continue sur $\mathbf{R}$. La fonction $\mathrm{G_T}$ est somme d'une série normalement convergente de fonctions continues : elle est continue.

   (c) On a vu que, pour tout $x\in\mathbf{R}$, on a $\mathrm{F}'(x)=\sum_{n\in\mathbf{N}}\lambda_n f'(x-a_n)$, au sens que si un des termes de la série vaut $+\infty$ ou si cette série à termes positifs diverge, on écrit $\sum_{n\in\mathbf{N}}\lambda_n f'(x-a_n)=+\infty$.

   Comme pour tout x, tout $n\in\mathbf{N}$ et tout $\mathrm{T}\in\mathbf{R}_+^*$ on a $g_{\mathrm{T}}(x-a_n)\leq f'(x-a_n)$, on a $\sum_{n\in\mathbf{N}}\lambda_n g_{\mathrm{T}}(x-a_n)\leq\sum_{n\in\mathbf{N}}\lambda_n f'(x-a_n)$, soit $\mathrm{G_T}(x)\leq\mathrm{F}'(x)$. Comme cela a lieu pour tout T, on trouve $\sup\{\mathrm{G_T}(x);\ \mathrm{T}\in\mathbf{R}_+\}\leq\mathrm{F}'(x)$.

   Soient $x\in\mathbf{R}$ et $\mathrm{M}\in\mathbf{R}_+^*$ tel que $\mathrm{M}<\mathrm{F}'(x)$. Alors M ne majore pas les sommes partielles $\sum_{k=0}^{n}\lambda_k f'(x-a_k)$, donc il existe $n\in\mathbf{N}$ tel que $\sum_{k=0}^{n}\lambda_k f'(x-a_k)>\mathrm{M}$. Si x est égal à un des a_k avec $0\leq k\leq n$, alors, pour $\mathrm{T}=\dfrac{\mathrm{M}+1}{\lambda_k}$, on a $\lambda_k g_{\mathrm{T}}(x-a_k)=\mathrm{M}+1$, donc $\mathrm{G_T}(x)>\mathrm{M}$; sinon, pour $\mathrm{T} = \max\{f'(x-a_k);\ 0 \le k \le n\}$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} g_{\mathrm{T}}(x-a_k) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x-a_k) > \mathrm{M}$. Dans tous les cas, on a trouvé $\mathrm{T} \in \mathbf{R}_+$ tel que $\mathrm{G_T}(x) > \mathrm{M}$, donc $\sup\{\mathrm{G_T}(x);\ \mathrm{T} \in \mathbf{R}_+\} > \mathrm{M}$. Cela étant vrai pour tout $\mathrm{M} < \mathrm{F}'(x)$, on a $\sup\{\mathrm{G_T}(x);\ \mathrm{T} \in \mathbf{R}_+\} \ge \mathrm{F}'(x)$.

2. (a) Soit $x \in \mathbf{R}$. S'il existe $\mathrm{T} \in \mathbf{R}_+$ tel que $\mathrm{G_T}(x) > \mathrm{M}$, alors $\mathrm{F}'(x) \ge \mathrm{G_T}(x) > \mathrm{M}$, donc $x \in \mathrm{U_M}$. Si $x \in \mathrm{U_M}$, alors $\mathrm{F}'(x) > \mathrm{M}$, et comme $\mathrm{F}'(x) = \sup\{\mathrm{G_T}(x);\ \mathrm{T} \in \mathbf{R}_+\}$, M ne majore pas $\{\mathrm{G_T}(x);\ \mathrm{T} \in \mathbf{R}_+\}$, donc il existe $\mathrm{T} \in \mathbf{R}_+$ tel que $\mathrm{G_T}(x) > \mathrm{M}$.

   (b) Pour tout $\mathrm{T} \in \mathbf{R}_+$, la fonction $\mathrm{G_T}$ est continue, donc l'ensemble $\{x \in \mathbf{R};\ \mathrm{G_T}(x) > \mathrm{M}\}$ est ouvert ; la réunion $\mathrm{U_M} = \displaystyle\bigcup_{\mathrm{T} \in \mathbf{R}_+} \{x \in \mathbf{R};\ \mathrm{G_T}(x) > \mathrm{M}\}$ est donc ouverte. Or pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\mathrm{F}'(a_n) = +\infty$. Donc $\mathrm{D} \subset \mathrm{U_M}$ et $\mathrm{U_M}$ est dense.

3. On a $\mathrm{A} = \{x \in \mathbf{R};\ \mathrm{F}'(x) = +\infty\} = \{x \in \mathbf{R};\ \forall \mathrm{M} \in \mathbf{N},\ \mathrm{F}'(x) > \mathrm{M}\} = \displaystyle\bigcap_{\mathrm{M} \in \mathbf{N}} \mathrm{U_M}$. Comme pour tout $\mathrm{M} \in \mathbf{N}$, l'ensemble $\mathrm{U_M}$ est ouvert et dense, l'intersection A est dense dans $\mathbf{R}$, et comme D est dénombrable $\mathrm{A} - \mathrm{D}$ est encore dense dans $\mathbf{R}$ (d'après III.A).

B. Densité de l'ensemble des points de pente finie.

1. Soient $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $a < b$. Soit $\mathrm{M} \in \mathbf{R}_+^*$. Posons $\mathrm{C} = \{x \in [a,b];\ x \notin \mathrm{U_M}\}$. Soit $g : [a,b] \to [0,1]$ une fonction continue telle que $g(t) = 1$ pour tout $x \in \mathrm{C}$. Pour tout $x \in [a,b]$, on a $g(x) = 1$ ou $\mathrm{F}'(x) > \mathrm{M}$, donc $\mathrm{M}g(x) + \mathrm{F}'(x) \ge \mathrm{M}$. Posons alors $\Phi(x) = \mathrm{M}\displaystyle\int_a^x g(t)dt + \mathrm{F}(x)$. La fonction Φ est continue sur $[a,b]$ dérivable au sens généralisé en tout point de $]a,b[$ et $\Phi'(x) = \mathrm{M}g(x) + \mathrm{F}'(x) \ge \mathrm{M}$; il vient $\Phi(b) - \Phi(a) \ge \mathrm{M}(b-a)$ (d'après I.A.2.(b)) soit $\displaystyle\int_a^b \mathrm{M}g(t)\,dt + \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) \ge \mathrm{M}(b-a)$.

2. Soient $a, b \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ tels que $a + \varepsilon < b$. Posons $\mathrm{M} = \dfrac{\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)}{b - a - \varepsilon}$ et $\mathrm{C} = \{x \in [a,b];\ x \notin \mathrm{U_M}\} \subset \mathrm{B} \cap [a,b]$. D'après la question précédente, pour toute fonction continue $g : [a,b] \to [0,1]$ satisfaisant $g(x) = 1$ pour tout $x \in \mathrm{C}$ on a
$\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt \ge b - a - \frac{\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)}{\mathrm{M}} = \varepsilon$. D'après III.B, pour toute partie dénombrable $\mathrm{N} \subset \mathbf{R}$, l'ensemble $\mathrm{B} - \mathrm{N}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

4.2.3 Commentaires sur la deuxième épreuve écrite

Objet du problème

Pour construire une fonction strictement croissante sur $\mathbf{R}$, dérivable et dont la dérivée s'annule en tout point d'un ensemble dense dans $\mathbf{R}$, le sujet faisait construire sa bijection réciproque. Cette bijection réciproque F devait avoir une « dérivée au sens généralisé » infinie sur une partie dense de $\mathbf{R}$. Cette « dérivabilité au sens généralisé » était définie par l'énoncé. La première partie demandait de redémontrer des résultats classiques d'analyse des fonctions réelles d'une variable réelle dans ce cadre élargi et traitait l'exemple de la fonction racine cubique. La deuxième partie construisait la fonction F. On démontrait dans la partie III des résultats sur les parties denses de $\mathbf{R}$, pour enfin dans la partie IV prouver que les ensembles des points de pente finie et de pente infinie de F étaient tous deux gros : on démontrait de fait que les points de pente infinie forment un G_δ dense, négligeable pour la mesure de Lebesgue.

Partie I

Dans la partie A, il s'agissait de démontrer qu'en prenant comme fonction « dérivable au sens généralisé » en a une fonction continue en a et telle que le taux d'accroissement en a, a une limite dans $\overline{\mathbf{R}}$, on pouvait retrouver des résultats classiques sur les fonctions bijectives dérivables, sur les extrema des fonctions dérivables, un théorème de Rolle et une formule des accroissements finis élargis, ainsi qu'un théorème de prolongement des applications dérivables.

Dans toute cette partie, il n'était pas suffisant de rappeler le théorème correspondant pour les fonctions dérivables et d'invoquer la convention $\dfrac{1}{+\infty} = 0$ et $\dfrac{1}{0} = +\infty$ pour conclure hâtivement. Une convention ne peut servir qu'à alléger une écriture. Avant d'utiliser par exemple $\dfrac{1}{0} = +\infty$, il faut prouver que le dénominateur tend vers 0 par valeurs strictement positives.

Pour prouver que la dérivée est nulle en un extremum, il faut écarter, en le justifiant, une éventuelle valeur infinie de la limite du taux d'accroissement. Le plus innocent des énoncés (par exemple : la somme de deux fonctions dérivables est dérivable) ne se laisse pas généraliser si facilement : la somme de deux fonctions admettant une dérivée généralisée n'admet pas forcément une dérivée généralisée, puisqu'il peut se présenter des formes indéterminées $(+\infty) + (-\infty)$.

On peut voir sur ces exemples non exhaustifs que cette première partie demandait un travail de précision que trop de candidats ont malheureusement mal évalué, soit parce qu'ils n'ont pas vu les difficultés posées par la définition de la dérivabilité généralisée, soit parce que les ayant vues, ils les ont traitées par généralisation hâtive des résultats correspondants sur les fonctions dérivables.

Signalons aussi que, dans la première question, il était nécessaire de remarquer immédiatement qu'une bijection croissante entre deux intervalles de la droite réelle est continue ainsi que la bijection réciproque.

Dans la partie B, il s'agissait d'appliquer les résultats du A à la fonction racine cubique, ce qu'ont convenablement réussi deux bons tiers des candidats. D'autres ont préféré réinvestir des connaissances sur les puissances à exposants fractionnaires, en oubliant trop souvent que les puissances à exposants fractionnaires ne sont définies que sur $]0, +\infty[$.

La partie C a été mieux réussie dans l'ensemble, si l'on excepte la question 2, qui demandait elle aussi une bonne précision dans l'énoncé des théorèmes utilisés et dans les encadrements menant au calcul de la limite de la suite $(a_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$.

Partie II

La fonction F était définie comme une somme de série de fonctions, uniformément convergente sur tout compact de $\mathbf{R}$, mais pas nécessairement normalement convergente sur tout compact. Quelques rares candidats ont vu dans la première question, qu'on pouvait l'écrire comme somme d'une série numérique dont on savait seulement qu'elle était convergente, et d'une série normalement convergente sur tout compact. Les autres candidats ayant abordé cette question ont mal usé des valeurs absolues, ou fait disparaitre la dépendance en x au détour d'une majoration de façon à obtenir la convergence normale.

La suite de cette partie, bien détaillée n'a pas posé de problèmes majeurs aux candidats.

Partie III

On démontrait dans le A le théorème de Baire (dans $\mathbf{R}$). Cette partie a attiré un petit nombre de candidats, plus à l'aise avec des techniques de topologie qu'avec les manipulations sur les dérivées et leur a permis de gagner des points. La construction du *premier terme* des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a été comprise par un nombre significatif de candidats. La construction du n-ième terme de ces suites n'est pas essentiellement différente. Mais il n'étonnera personne qu'on attend mieux qu'un : « et ainsi de suite » pour conclure une construction par récurrence.

La partie B, dans laquelle on étudiait des « gros compacts » (*i.e.* des compacts non négligeables pour la mesure de Lebesgue) n'a été abordée que par un nombre très faible de candidats qui l'ont alors traitée avec succès.

Partie IV

Il s'agissait ici d'appliquer les résultats prouvés dans la partie III à la fonction F. Cependant, peu de candidats l'ont atteinte.