# Formes quadratiques

8 octobre 2015

prérecquis : forme bilinéaire, rang et noyau d'une forme bilinéaire symétrique, forme quadratique, forme hermitienne, décomposition de gauss et base orthogonale, matrice d'une forme quadratique, changement de base, signature d'une forme quadratique sur $\mathbb{R}$ ou d'une forme hermitienne.

Référence principale : gourdon d'algèbre

EXERCICE I (inspiré du gourdon)
on considère la forme quadratique $q$ définie sur $\mathbb{R}^4$ par $q(x,y,z,t) = xy+yz+zt+tx$.
1) Par la méthode de gauss, décomposer $q$ en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.
2) En déduire la signature et le rang de $q$
3) Determiner explicitement une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de $q$ est diagonale.

EXERCICE II (inspiré du gourdon)
on considère la forme quadratique $q$ définie sur $\mathbb{R}^3$ par $q(x,y,z) = x^2-2y^2+yz+zx$.
1) Appliquer la méthode de gauss à $q$.
2) En déduire la signature et le rang de $q$
3) Determiner explicitement une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de $q$ est diagonale.

EXERCICE III (inspiré du gourdon)

on considère l'application $q$ définie sur $\mathbb{C}^3$ par $q(x,y,z) = x\overline{x}+y\overline{y}+z\overline{z}+y\overline{x}+x\overline{y}-z\overline{y}-y\overline{z}$.
1) Montrer que $q$ est une forme hermitienne.
2) Appliquer la méthode de gauss à $q$.
3) En déduire une base de $\mathbb{C}^3$ qui soit $q$ orthogonale.

EXERCICE IV
1) Soient $E, F$ des $\mathbb{R}$-ev de dim finies respectivement égales à $n$ et $m$.
Montrer que l'ensemble des applications bilinéaires de $E \times F$ dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-ev de dim finie égale à $m \times n$.
2) Montrer que pour $\phi_1, ..., \phi_p \in E^*$ et $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k(\phi_k(x))^2$ est une forme quadratique sur $E$ et que son rang est inférieur ou égal à $p$. (minorer la dimension du noyau)

EXERCICE V (inspiré du gourdon)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons l'application $\phi : \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{R}$ , $P \mapsto \int_{-1}^{1} \overline{P(x)}Q(-x)dx$

On note $\mathcal{I}$ le sev de $\mathbb{C}_n[X]$ formé par les polynômes impairs et $\mathcal{P}$ celui formé par les polynômes pairs.

1) Montrer que $\phi$ est une forme hermitienne

2) Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont $\phi$-orthogonaux.

3) Determiner la signature de $\phi$.

EXERCICE VI (inspiré du gourdon)

1) Montrer que l'application $(A, B) \mapsto tr({}^tA\,B)$ définit un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que les sev des matrices symétriques et antisymétriques sont des supplémentaires orthogonaux pour ce produit scalaire.

2) Montrer que $q : A \mapsto tr(A^2)$ est une forme quadratique sur $M_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa signature.

EXERCICE VII (inspiré du gourdon)

Montrer que $q : A(tr(A))^2$ est une forme quadratique sur $M_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa signature.

EXERCICE VIII

Montrer que si $\phi$ est une application bilinéaire symétrique sur $E = \mathbb{R}^n$ vérifiant $\forall x \in E, \phi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$, alors $\phi$ est définie positive ou définie négative.