## Objectif et conventions

Le but de ce problème est de construire une fonction strictement croissante sur $\mathbf{R}$, dérivable et dont la dérivée s'annule en tout point d'un ensemble dense dans $\mathbf{R}$. En fait, c'est la fonction $\mathrm{F}$ réciproque de celle-ci qui est construite.

On note $\overline{\mathbf{R}}$ l'ensemble $\mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Lorsque, dans certaines conditions, une suite ou une fonction tend vers $+\infty$, on dit qu'elle a $+\infty$ pour limite dans $\overline{\mathbf{R}}$. On fait la convention analogue pour $-\infty$.

Si $\mathrm{A}$ et $\mathrm{B}$ sont deux ensembles, on note $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ l'ensemble des points de $\mathrm{A}$ qui n'appartiennent pas à l'ensemble $\mathrm{B}$.

Dans tout le problème, on désigne par $f$ l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x)^3 = x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Autrement dit $f(x) = x^{1/3}$.

## I . La fonction racine cubique

### A. Dérivées au sens généralisé

Soient $\mathrm{I}$ un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et $a$ un point de $\mathrm{I}$. Soit $g : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ une fonction continue au point $a$. On dit que la fonction $g$ est *dérivable au sens généralisé* au point $a$ lorsque le rapport $\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}$ admet une limite $\ell$ dans $\overline{\mathbf{R}}$ lorsque $x$ tend vers $a$, avec $x \neq a$.

Même dans le cas d'une limite infinie, on écrit $g'(a) = \ell$.

1) Soient $\mathrm{I}$ et $\mathrm{J}$ des intervalles ouverts de $\mathbf{R}$ et soit $g$ une bijection croissante de $\mathrm{I}$ sur $\mathrm{J}$. On suppose que la fonction $g$ est dérivable au sens généralisé en tout point de $\mathrm{I}$. Démontrer que la fonction $g^{-1}$, réciproque de $g$, est dérivable au sens généralisé en tout point de $\mathrm{J}$, et que, pour tout $a \in \mathrm{J}$, on a

$$(g^{-1})'(a) = \frac{1}{g'(g^{-1}(a))},$$

avec les conventions $\dfrac{1}{0} = +\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty} = 0$.

2) Soient $\mathrm{I}$ un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et $g : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ une fonction continue.

a) Soit $c$ un point de $\mathrm{I}$. On suppose que la fonction $g$ est dérivable au sens généralisé au point $c$ et qu'elle admet un maximum local en $c$. Démontrer que l'on a $g'(c) = 0$.

b) On suppose que la fonction $g$ est dérivable au sens généralisé en tout point de l'intervalle $\mathrm{I}$. Soient $a$, $b \in \mathrm{I}$ tels que $a < b$. Démontrer qu'il existe $c \in ]a, b[$ tel que

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

[on pourra examiner dans un premier temps le cas où $g(a) = g(b)$ ].

3) Soient $\mathrm{I}$ un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et $g : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Soit $a$ un point de $\mathrm{I}$. On suppose que la fonction $g$ est dérivable en tout point de $\mathrm{I} - \{a\}$, et que la fonction $x \mapsto g'(x)$ admet une limite $\ell$ dans $\overline{\mathbf{R}}$ lorsque $x$ tend vers $a$, avec $x \neq a$.

a) Soit $x$ un point de I distinct de $a$ ; posons $\mathrm{J}_x = ]a, x[$ si $x > a$ et $\mathrm{J}_x = ]x, a[$ si $x < a$. Démontrer que l'on a

$$\inf\{g'(y);\ y \in \mathrm{J}_x\} \ \leqslant\ \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \ \leqslant\ \sup\{g'(y);\ y \in \mathrm{J}_x\}.$$

b) Démontrer que la fonction $g$ est dérivable au sens généralisé au point $a$ et que l'on a $g'(a) = \ell$.

**B. La fonction racine cubique**

Rappelons que l'on désigne par $f$ l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x)^3 = x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

1) a) Démontrer que la fonction $f$ est dérivable au sens généralisé en tout point de $\mathbf{R}$ et que l'on a $f'(0) = +\infty$.

b) Soient $s$ et $t$ des nombres réels $\neq 0$. Démontrer l'équivalence

$$f'(s) \leqslant f'(t) \iff |s| \geqslant |t|.$$

c) Soit $a$ un nombre réel $> 0$. Démontrer que la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $x \mapsto f(x+a) - f(x-a)$ atteint son maximum en $0$.

d) Démontrer que, pour tous $x, y \in \mathbf{R}$, on a $|f(x) - f(y)| \leqslant 2 \left| f\left(\dfrac{x-y}{2}\right)\right|$.

e) Démontrer que la fonction $f$ est uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

2) a) Démontrer que, pour tous $x, y \in \mathbf{R}$, on a $x^2 + xy + y^2 \geqslant \dfrac{3}{4}\, x^2$.

b) En déduire que, pour $x$ et $x_0 \in \mathbf{R}$, tels que $x \neq x_0$ et $x_0 \neq 0$, on a

$$0 \leqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 4 f'(x_0).$$

**C. Construction d'une suite dense**

Notons $g$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $g(t) = t\cos t$. Rappelons que l'on désigne par $f$ l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x)^3 = x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

1) a) Démontrer que la fonction $g \circ f$ est dérivable au sens généralisé en tout point de $\mathbf{R}$. Étudier en particulier $(g \circ f)'(0)$.

b) Démontrer que $(g \circ f)'(x)$ tend vers $0$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

*Dans les questions suivantes de cette partie, pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose*

$$a_n = g(f(n)) = n^{1/3}\cos(n^{1/3}).$$

2) Soient $x \in \mathbf{R}$ et $k \in \mathbf{N}$ tels que $k\,\pi \geqslant |x|$.

a) Démontrer qu'il existe un nombre réel $y(k, x)$ dans l'intervalle $[k\,\pi, (k+1)\pi[$ tel que $g(y(k, x)) = x$.

b) On note $n_k$ la partie entière de $y(k, x)^3$. Démontrer que la suite $(a_{n_k})_{k \in \mathbf{N}}$ a pour limite $x$.

3) Démontrer que l'ensemble $\{a_n;\ n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

4) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $\lambda_n = \dfrac{1}{n^2 + 1}\cdot$ Démontrer que les séries de terme général $\lambda_n$ et $\lambda_n f(a_n)$ sont convergentes.

## II . Construction de la fonction F

Dans cette partie, on se donne une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels et une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels *strictement positifs*. On suppose que les séries de terme général $\lambda_n$ et $\lambda_n f(a_n)$ sont convergentes.

1) a) Démontrer que la série de fonctions, dont le terme général est la fonction $x \mapsto \lambda_n f(x-a_n)$, est uniformément convergente sur toute partie compacte de $\mathbf{R}$.

*Dans le suite de cette partie, on pose, pour tout* $x \in \mathbf{R}$,

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n f(x-a_n).$$

b) Démontrer que la fonction F est continue et strictement croissante.

c) Démontrer que,

pour tout $x > a_0$, on a $\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(a_0) \geqslant \lambda_0\, f(x-a_0)$,

pour tout $x < a_0$, on a $\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(a_0) \leqslant \lambda_0\, f(x-a_0)$.

d) En déduire les limites de la fonction F en $+\infty$ et $-\infty$.

e) Démontrer que la fonction F est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.

*Nous allons démontrer, dans la suite de cette partie, que la fonction* F *possède une dérivée au sens généralisé en tout point de* $\mathbf{R}$.

2) Démontrer que, pour $x$ et $x_0 \in \mathbf{R}$, tels que $x \neq x_0$, et pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x-a_k)-f(x_0-a_k)}{x-x_0} \leqslant \frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(x_0)}{x-x_0}.$$

3) Démontrer que la fonction F est dérivable au sens généralisé au point $a_n$ et que l'on a $\mathrm{F}'(a_n)=+\infty$.

4) Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. On suppose que $x_0$ n'est égal à aucun $a_n$, $n \in \mathbf{N}$, mais que la série de terme général $\lambda_n f'(x_0-a_n)$ est divergente.

a) Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer qu'il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, si l'on a $0 < |x-x_0| < \varepsilon$, alors on a

$$1+\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x-a_k)-f(x_0-a_k)}{x-x_0} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\, f'(x_0-a_k).$$

b) En déduire que la fonction F est dérivable au sens généralisé au point $x_0$ et que l'on a $\mathrm{F}'(x_0)=+\infty$.

5) Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. On suppose que $x_0$ n'est égal à aucun $a_n$, $n \in \mathbf{N}$, et que la série de terme général $\lambda_n f'(x_0-a_n)$ est convergente.

a) Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $x \neq x_0$, on a

$$\frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(x_0)}{x-x_0} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x-a_k)-f(x_0-a_k)}{x-x_0} + 4 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0-a_k).$$

b) En déduire que la fonction F est dérivable au point $x_0$ et que l'on a $\mathrm{F}'(x_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0-a_k)$.

6) Démontrer que la fonction $\mathrm{F}^{-1}$, réciproque de F, est dérivable en tout point de $\mathbf{R}$.

## III . Parties denses de $\mathbf{R}$

### A. Intersections d'ensembles ouverts denses

Donnons-nous, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, un sous-ensemble ouvert $V_n$ de $\mathbf{R}$, dense dans $\mathbf{R}$.
On pose $B = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} V_n$.

1) Soit I un intervalle ouvert, non vide, de $\mathbf{R}$.

a) Démontrer qu'il existe des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $u_n < v_n$ ;

(ii) $[u_0, v_0] \subset I \cap V_0$ ;

(iii) pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $[u_{n+1}, v_{n+1}] \subset ]u_n, v_n[ \cap V_{n+1}$.

b) Démontrer que l'ensemble $I \cap B$ n'est pas vide.

2) Démontrer que l'ensemble B est dense dans $\mathbf{R}$.

3) Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de points de B. En considérant les ensembles ouverts $V_n - \{x_n\}$, démontrer que l'ensemble $B' = B - \{x_n;\ n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

### B. Parties de $\mathbf{R}$ contenant de « gros » ensembles compacts

1) Soient $a$ et $b \in \mathbf{R}$ tels que $a < b$, et soit $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de points de l'intervalle $[a, b]$. On suppose que l'ensemble $C = \{c_n;\ n \in \mathbf{N}\}$ est compact. Soit $\varepsilon$ un nombre réel $> 0$ et soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que $2 \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \leqslant \varepsilon$.

a) Pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, posons $I_k = ]c_k - \alpha_k, c_k + \alpha_k[$. Démontrer qu'il existe un entier $n \in \mathbf{N}$ tel que l'ensemble C soit contenu dans la réunion $\bigcup_{0 \leqslant k \leqslant n} I_k$.

b) Démontrer qu'il existe une fonction continue $g : [a, b] \to [0, 1]$ telle que l'on ait

$g(x) = 1$ pour tout $x \in C$ ;

$g(x) = 0$ pour tout $x \notin \bigcup_{0 \leqslant k \leqslant n} I_k$.

c) Démontrer l'inégalité $\int_a^b g(t)\,dt \leqslant \varepsilon$.

2) Soit A une partie de $\mathbf{R}$. On suppose que, pour tous nombres réels $a$ et $b$ tels que $a < b$, il existe une partie compacte C de $\mathbf{R}$, contenue dans $A \cap [a, b]$, et un nombre réel $\varepsilon > 0$ tels que, pour toute fonction continue $g : [a, b] \to [0, 1]$, satisfaisant à $g(x) = 1$ pour tout $x \in C$, on ait $\int_a^b g(t)\,dt \geqslant \varepsilon$.

a) Démontrer que, pour tous nombres réels $a$ et $b$ tels que $a < b$, l'ensemble $A \cap [a, b]$ n'est pas dénombrable.

b) Démontrer que l'ensemble A est dense dans $\mathbf{R}$, et que, pour toute partie dénombrable D de A, l'ensemble $A - D$ est encore dense dans $\mathbf{R}$.

## IV . Les points de pente infinie de F

On reprend les notations de la partie II. On se donne une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels et une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels strictement positifs. On suppose que les séries de terme général $\lambda_n$ et $\lambda_n f(a_n)$ sont convergentes, et l'on pose $\mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n f(x - a_n)$. On suppose de plus que l'ensemble $\mathrm{D} = \{a_n;\ n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

### A. Densité de l'ensemble des points de pente infinie

1) Pour $x \in \mathbf{R}$ et $\mathrm{T} \in ]0, +\infty[$, posons $g_{\mathrm{T}}(x) = \inf\{\mathrm{T}, f'(x)\}$.

a) Soit $\mathrm{T} \in ]0, +\infty[$. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n g_{\mathrm{T}}(x - a_n)$ est convergente.

b) Pour $x \in \mathbf{R}$, posons $\mathrm{G}_{\mathrm{T}}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n g_{\mathrm{T}}(x - a_n)$. Démontrer que la fonction $\mathrm{G}_{\mathrm{T}}$ est continue sur $\mathbf{R}$.

c) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\mathrm{F}'(x) = \sup\{\mathrm{G}_{\mathrm{T}}(x);\ \mathrm{T} \in ]0, +\infty[\}$, où la borne supérieure est prise dans $\overline{\mathbf{R}}$.

2) Soit M un nombre réel $> 0$. On pose $\mathrm{U}_{\mathrm{M}} = \{x \in \mathbf{R};\ \mathrm{F}'(x) > \mathrm{M}\}$.

a) Démontrer que l'ensemble $\mathrm{U}_{\mathrm{M}}$ est la réunion des ensembles $\{x \in \mathbf{R}; \mathrm{G}_{\mathrm{T}}(x) > \mathrm{M}\}$ pour $\mathrm{T} \in ]0, +\infty[$.

b) Démontrer que l'ensemble $\mathrm{U}_{\mathrm{M}}$ est ouvert et dense dans $\mathbf{R}$.

3) Soit A l'ensemble $\{x \in \mathbf{R};\ \mathrm{F}'(x) = +\infty\}$. Démontrer que l'ensemble $\mathrm{A} - \mathrm{D}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

### B. Densité des points de pente finie

1) Soient $a$ et $b \in \mathbf{R}$ et soit $\varepsilon > 0$ tels que $a + \varepsilon < b$. Soit M un nombre réel $> 0$ ; notons C l'ensemble $\{x \in [a, b];\ x \notin \mathrm{U}_{\mathrm{M}}\}$. Soit $g : [a, b] \to [0, 1]$ une fonction continue telle que $g(x) = 1$ pour tout $x \in \mathrm{C}$.

Démontrer l'inégalité $\int_a^b \mathrm{M}\, g(t)\, dt + \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) \geqslant \mathrm{M}(b - a)$.

2) Soit B l'ensemble $\{x \in \mathbf{R};\ \mathrm{F}'(x) \neq +\infty\}$. Démontrer que, pour toute partie dénombrable N de B, l'ensemble $\mathrm{B} - \mathrm{N}$ est dense dans $\mathbf{R}$.