Transformations du plan

Agrégation interne 2015/2016

Exercice 1 :
Rappeler le définition des bissectrices. Montrer l'existence d'un cercle inscrit (interne au triangle et tangent au trois côtés) et des trois cercles exinscrits.
Montrer la construction à l'aide de Geogebra ou de Geoplan.

Exercice 2 :
Construire en justifiant le centre de la rotation de la composée de deux rotations de centre O et Ω et d'angle α et β.
Pour la construction, on considèrera les deux angles déjà tracés à l'aide de demi-droites.

Exercice 3 :
Donner le tableau récapitulant les isométries du plan, avec leurs éléments caractéristiques.
Montrer l'existence et l'unicité de la décomposition canonique de la symétrie glissée : il existe une droite vectorielle D et un vecteur $\vec{u}$ orthogonal à la direction de D tels que la symétrie soit la composée de la réflexion d'axe D et la translation de vecteur $\vec{u}$.

Exercice 4 :
Retrouver l'ensemble des isométries qui laisse un polygône régulier invariant.
Cet ensemble est un groupe appelé groupe d'isotropie.
Trouver le groupe d'isotropie d'un triangle isocèle
Et celui du graphe de la sinusoïde. Dans ce dernier cas on parle de "frise". Il est beaucoup plus ardu.

Exercice 5 :
Construire un hexagône à l'aide d'un logiciel de géométrie.

Exercice 6 :
On pose $z := e^{2i\frac{\pi}{5}}$ et $x := cos\left(2i\frac{\pi}{5}\right)$.
Remarquer que $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$, et trouver la valeur de x.
En déduire une construction du pentagône régulier à la règle et au compas.

Définition 0.1

> *Soit un triangle ABC, les droites supports des côtés étant respectivement a, b, c.*
> *Une transversale est une droite coupant les trois côtés.*
> *Des céviennes sont des droites issues des sommets A, B, C.*

Exercice 7 : **Ménélaus**.
Trois points A', B', C' pris respectivement sur les droites a, b, c déterminent une transversale si et seulement si

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$$

Montrer cette propriété d deux manières différentes (Thalès, puis homothéties, par exemple).

Exercice 8 :
Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan, et F un point n'appartenant pas à la droite.
On appelle parabole de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$ l'ensemble $\mathcal{P}$ des points équidistants de F et de $\mathcal{D}$.
On note H le projeté orthogonal de F sur $\mathcal{D}$, $p = FH$ s'appelle le paramètre de la parabole.
Montrer que (FH) est un axe de symétrie de la parabole.
Montrer que (FH) recoupe $\mathcal{P}$ en un point que l'on notera S, appelé sommet de la parabole.
Construire point par point la parabole à la règle et au compas.

Exercice 9 :
On appelle cercle principal de l'ellipse de foyers F et F' et de grand axe $2a$, le cercle centré en O, de rayon a, où O est le centre de l'ellipse.
Placer l'ellipse par rapport à son cercle principal.

Exercice 10 :
Trouver deux affinités orthogonales qui transforme le cercle principal d'une ellipse en cette ellipse.
En déduire une représentation paramétrique de l'ellipse.

Exercice 11 : Figure affine d'un cercle
Trouver l'image d'un cercle par une affinité orthogonale.
On définira alors le cercle secondaire d'une ellipse.

Exercice 12 :
Déterminer l'aire d'une ellipse.

Exercice 13 : Procédé de la bande de papier
Soient les extrémités U et V d'un segment de longueur constante, assujetis à se déplacer respectivement sur deux axes orthogonaux (Ox) et (Oy), et soit M un point lié à ce segment tel que $MV = a$ et $MU = b$.
Montrer que le point M se trouve sur une ellipse, dont on donnera des éléments caractéristiques.
Toute l'ellipse est-elle atteinte ?
Que se passe-t-il quand vous vous trouvez sur une échelle qui glisse le long du mur ?

Exercice 14 :
On appelle transvection du plan une application affine admettant une droite de points invariants et telle que toute droite joignant un point en dehors de cette droite et son image est parallèle à cette droite.
On suppose connu la droite invariante et un point A et son image A'.
Soit M un point du plan, construire son image M'.