Arithmétique de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$

Agrégation interne 2015/2016

Exercice 1 :
Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

1. $15x - 38y = 0$
2. $15x - 36y = 1$
3. $15x + 72y = 3$
4. $15x + 36y = 3$. Pouvait-on déduire ans calcul les solutions de cette équation à partir de la question précédente ?

Exercice 2 :
Énoncer l'algorithme d'Euclide et l'écrire.

Exercice 3 :
Résoudre dans $\mathbb{N}$: 2 est le reste de la division euclidienne de 19^n par 7
Même question avec : 1 est le reste de la division eulidienne de 2^n par 9.

Exercice 4 :
On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n_i n\mathbb{N}}$ en posant
$F_0 = 0$,
$F_1 = 1$,
et pour tout n entier naturel non nul, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a l'égalité
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$
2. En déduire que $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.
3. Soit n un entier naturel et p un entier supérieur ou égal à 1, montrer que
$$F_{n+p} = F_{n+1}F_p + F_nF_{p-1}.$$
4. Soient a et b des entiers tels que $0 \leq b < a$.
   (a) Montrer que $F_a \wedge F_b = F_{a-b} \wedge F_b$.
   (b) En déduire que si r est le reste de la division de a par b, alors
   $$F_a \wedge F_b = F_b \wedge F_r.$$
   (c) Montrer que $F_a \wedge F_b = F_{a\wedge b}$.

Exercice 5 :
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Soient $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une suite finie d'entiers non nuls.
Le PGCD de $a_1, ..., a_n$ est le plus grand entier qui divise tous les a_i. Si ce PGCD est 1, on dit que $a_1, ..., a_n$ sont premiers entre eux dans leur ensemble.

1. Montrer que si parmi les a_i, deux sont premiers entre eux, alors les a_i sont premiers entre eux dans leur ensemble.
2. La réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer que $PGCD(a_1, a_2, a_3) = a_1 \wedge (a_2 \wedge a_3)$.
4. Montrer qu'il existe des entiers $(u_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ tel que $a_1u_1 + ... + a_nu_n = PGCD(a_1, ..., a_n)$.

Exercice 6 : À l'aide des congruences, montrer les critères de divisibilité en base 10 par $2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 25, 100$.

Exercice 7 : Pour tout entier a premier avec n, montrer qu'il existe un entier a' tel que $aa' \equiv 1 \; mod \; n$.
En déduire la méthode de résolution des équations de type $ax \equiv b \; mod \; n$.

Exercice 8 : Soient n et p des entiers premiers entre eux.
On cherche à résoudre le système $\begin{cases} x \equiv a \; mod \; n \\ x \equiv b \; mod \; p \end{cases}$.

1. À l'aide des coefficients de la relation de Bezout, trouver deux entiers α et β tels que $\begin{cases} \alpha \equiv 1 \; mod \; n \\ \alpha \equiv 0 \; mod \; p \end{cases}$ et $\begin{cases} \beta \equiv 0 \; mod \; n \\ \beta \equiv 1 \; mod \; p \end{cases}$.
2. À l'aide de α et β, trouver une solution particulière du système.
3. En déduire l'ensemble des solutions.

Exercice 9 : Trouver le nombre de diviseurs d'un entier en fonction de sa décomposition en nombres premiers.

Exercice 10 : Calculer $2^{500} \; mod \; 13$ (i.e trouver le reste de la division euclidienne de 2^{500} par 13).
Même question avec $26^{1000} \; mod \; 17$.

Exercice 11 :

1. Calculer la somme suivante pour x un réel et p un entier naturel :

$$1 - x + x^2 - ... + (-1)^p x^p$$

2. Montrer que quels que soient les entiers naturels x et n , l'entier $x^{2n+1} + 1$ est divisible par $x + 1$.

3. En déduire que, quel que soit l'entier naturel p, $(2^{(2^p)})^k + 1$ est divisible par $2^{(2^p)} + 1$, si l'entier k est impair.

4. Démontrer qu'un condition nécessaire pour que $2^m + 1$ soit premier est que l'entier naturel m soit une puissance de 2.

Voir aussi l'exercice qui suit.

Exercice 12 :

1. Démontrer que, quels que soient les entiers naturels x et n, l'entier $x^{2n+1} + 1$ est divisible par $(x + 1)$.

2. En déduire que $(2^{2^\alpha})^k + 1$ est divisible par $2^{2^\alpha} + 1$ si k est impair.

3. Démontrer que $2^\beta + 1$ ne peut être premier que si β est une puissance de 2.

4. Fermat pensait que la réciproque de cette propriété était vraie. Euler démontra, à l'aide d'un contre-exemple, qu'il n'en était pas ainsi. Faites de même en montrant que $2^{32} + 1$ est divisible par 641.

Exercice 13 :
L'objet de l'exercice est de résoudre, en nombres entiers, l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2$$

De tels triplets sont appelés <u>triplet pythagoricien</u>.

1. Démontrer que si l'on connaît les solutions telles que x, y, z sont premiers entre eux dans leur ensemble, on en déduit toutes les solutions de l'équation.

2. Démontrer que si le triplet (x, y, z) est une solution (avec x, y, z premiers entre eux dans leur ensemble) alors x, y, z sont premiers entre eux deux à deux.

   Etudier la parité de x, y, z.

3. Si y et z ont même parité, démontrer que toute solution (x, y, z) telle que (x, y, z) sont premiers entre eux dans leur ensemble est de la forme :

$$x = 2\alpha\beta, y = \alpha^2 - \beta^2, z = \alpha^2 + \beta^2$$

   avec α et β de parité contraires.

4. Démontrer que toutes les solutions sont données par les formules

$$x = 2kuv, y = k(u^2 - v^2), z = k(u^2 + v^2),$$

   les entiers $k, u, v (u > v)$ décrivant $\mathbb{N}$.

Exercice 14 :
Déterminer $\lambda \in \mathbb{C}$ pour que deux des solutions de l'équation algébrique $z^4 - 2z^2 + \lambda z + 3 = 0$ dans $\mathbb{C}$ vérifient $z_1 z_2 = 1$.
Résoudre l'équation dans ce cas.

Exercice 15 :
Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ la fraction rationnelle

$$\frac{X^5+1}{X^2(X-1)^2}.$$

Exercice 16 :
Chercher (et trouver !!) les polynômes de degré 7 tels que $P+1$ soit divisible par $(X-1)^4$ et $P-1$ par $(X+1)^4$.
En déduire U et V tels que $(X+1)^4U+(X-1)^4V=1$.

Exercice 17 :
Factoriser en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ X^5-1 et X^6+1.

Exercice 18 :
Soit P un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$, et n un élément de $\mathbb{Z}$. On pose $m=P(n)$.

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{Z}, P(n+km)$ est divisible par m
2. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme non constant tel que $P(n)$ est premier, quel que soit n.

Exercice 19 :
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n(X)=X^n-1$. Déterminer le PGCD de P_n et P_m.

Exercice 20 :
Prouver que X^5-X^2+1 n'admet aucune racine rationnelle, et une seule racine réelle.

Exercice 21 :
Déterminer les racines réelles du polynôme :

$$X^n+C_n^1 cos(\alpha)X^{n-1}+...+cos(n\alpha).$$