1 Produit scalaire et orthogonalité

1.1 Définitions

Définition 1.1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. *On dit que cet espace vectoriel est préhilbertien réel dès qu'il a été muni d'une forme bilinéaire symétrique, dont la forme quadratique associée est définie positive.*
2. *La forme polaire est alors appelée produit scalaire.*
3. *Si de plus, on est en dimension finie, on dit que l'espace est euclidien.*

Théorème 1.1

Soit E un espace vectoriel euclidien.
L'application E dans E, qui à X associe $\sqrt{X.X}$ est une norme, dite norme euclidienne.

Remarque 1

1. *Soit E l'espace vectoriel des fonctions d'une variable réelle continues sur un segment $[a, b]$ donné.*
   Alors
   $$< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)dx$$
   est un produit scalaire. En particulier, les inégalités de Cauchy-Schwartz et de Minkowsi sont vraies.
2. *Toutes les normes ne sont pas des normes euclidiennes. Cela bloque au moment de prouver la linéarité de l'addition pour la forme polaire associée. On peut d'ailleurs remarquer qu'une norme est euclidienne si et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme.*

1.2 Vecteurs orthogonaux

Dans toute la suite, on se place dans le cadre d'un espace vectoriel euclidien E, et on note le produit scalaire "."

Définition 1.2

Deux vecteurs sont dits orthogonaux s'ils sont conjugués : $X.Y = 0$.

Théorème 1.2

Le vecteur nul est le seul vecteur qui soit orthogonal à tout vecteur de E.

Théorème 1.3

Une condition nécessaire et suffisante pour que deux vecteurs X et Y soient orthogonaux est qu'ils vérifient :

$$||X+Y||^2 = ||X||^2 + ||Y||^2$$

1.3 Bases orthonormées

Définition 1.3

Un système $\mathcal{V}$ est dit orthogonal si deux vecteurs distincts de $\mathcal{V}$ sont orthogonaux.
Un système $\mathcal{V}$ est dit orthonormé s'il est orthogonal et que tous les vecteurs sont de norme 1.

Proposition 1.4

Tout système orthogonal qui ne contient pas 0 est libre.

Théorème 1.5 (Procédé d'orthogonalisation de Schmidt)

Si E est un espace vectoriel euclidien, et E' un sous-espace de E de dimension finie, alors E' admet au moins une base orthonormale.

Preuve du Théorème 1.5:
Cette preuve est à connaitre puisqu'elle fournit la construction d'une base orthonormale à partir d'une base quelconque.
Remarquons qu'il suffit d'obtenir une base orthogonale, puis de la normer i.e. de diviser chacun des vecteurs de base par sa norme.
E' est de dimension finie p, donc il existe une base de E' : notons la $e_1, e_2, ..., e_p$.

On pose $v_1 = e_1$, et on cherche $v_2 \in Vect(e_1, e_2)$, qui soit orthogonal à v_1, et qui forme une famille libre :

$$v_2 = e_2 - \lambda v_1$$

Le calcul montre qu'il suffit de prendre $\lambda = \frac{e_1.e_2}{||e_1||^2}$.
Supposons maintenant avoir construit $v_1, v_2, ..., v_{n-1}$ une base orthogonale de $Vect\{e_1, ..., e_{n-1}\}$, avec $n < p$.
On cherche v_n de la forme $e_n - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i$. Comme $v_i v_k = 0$ dès que $i \neq k$, les conditions $v_i v_n = 0$ implique que $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, on a $\lambda_i = \frac{e_n v_i}{||v_i||^2}$.
La propriété de récurrence est donc aussi vraie au rang n.
On peut conclure.

Proposition 1.6

Si $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormée, et si $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ sont des vecteurs de coordonnées $X = (x_i)$ et $Y = (y_j)$ dans cette base, alors

$$\begin{aligned} \overrightarrow{X} \,.\, \overrightarrow{Y} &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \\ &= det({}^tX.Y) = det({}^tY.X) \\ ||\,\overrightarrow{X}\,|| &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \end{aligned}$$

Le résultat des courses est intéressant : si E est un espace vectoriel réel donné, muni d'une base quelconque, il suffit de considérer le produit scalaire $\overrightarrow{X} \,.\, \overrightarrow{Y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ pour le munir d'une structure euclidienne (ce qui revient à considérer arbitrairement que cette base est orthonormée).
Ainsi lorsqu'on parle de R^n comme espace vectoriel euclidien, c'est que l'on considère que sa base canonique est orthonormée.
De même un isomorphisme entre deux espaces vectoriels euclidiens garde la structure euclidienne s'il envoie une b.o.n sur une b.o.n.
Donc tout espace euclidien de dimension n est isomorphe d'une infinité de manière à R^n muni de sa structure euclidienne.

Théorème 1.7

L'ensemble E'' des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs d'un sev E' est un sev de E ; on dit que c'est le sous-espace vectoriel orthogonal de E'
Si un vecteur $\overrightarrow{V}$ est orthogonal à tous les vecteurs d'une partie A de E, alors il est orthogonal au sev engendré par A.

Pas de surprise dans ce théorème qui avait déjà été vu. Par contre, comme la forme quadratique est définie positive, on a le théorème suivant :

Théorème 1.8

Si E est un espace vectoriel euclidien de dimension n, et si E'' est le sous-espace orthogonal du sous-espace E', le sous-espace orthogonal de E'' est E' ; E' et E'' sont supplémentaires.
Ils sont dits sous-espaces orthogonaux.

2 Groupes Orthogonaux

Dans cette section, on considère E un K-espace muni d'une forme quadratique Φ non dégénérée, de forme polaire φ.
Certaines proprétés du produit scalaire restent néanmoins vraies :

1. Tout système de vecteurs 2 à 2 conjugués dont aucun n'est le vecteur nul est libre,
2. Si E est de dimension finie, le procédé d'orthogonalisation de Schmidt reste pertinent,
3. Si E est de dimension finie, si E'' est l'espace conjugué de E', alors E' est celui de E'' et ils sont supplémentaires.

On a en plus si K est algébriquement clos, la propriété suivante :

Proposition 2.9

En dimension finie, si K est algébriquement clos, ou si E est euclidien, alors il existe des bases réduites dans lesquelles la matrice de Φ et donc de φ est I_n.
On dira alors que ces bases sont orthonorméees relativement à φ.

Théorème 2.10 (et Définition)

Les deux propriétés suivantes d'un endomorphisme de E sont équivalentes :

$$\begin{array}{lll} (i) & \forall \overrightarrow{X} \in E & \Phi(f(\overrightarrow{X})) = \Phi(\overrightarrow{X}) \\ (ii) & \forall (\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) \in E^2 & \varphi(f(\overrightarrow{X}), f(\overrightarrow{Y})) = \varphi(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}). \end{array}$$

Quand f possède ces propriétés, on dit qu'il conserve Φ et φ.

Définition 2.4

Tout automorphisme f de E conservant la forme quadratique Φ est dit opérateur orthogonal de E, relativement à Φ ;

Théorème 2.11 **(et Définition)**

L'ensemble $O_\varphi(E)$ des opérateurs orthogonaux de E, relativement à φ est un sous-groupe de $GL(E)$; on dit que $O_\varphi(E)$ est le groupe orthogonal de E relativement à φ.

On se place désormais en dimension finie :

Théorème 2.12

Tout endomorphisme f d'un espace vectoriel de dimension finie qui conserve la forme quadratique est un opérateur orthogonal.

Théorème 2.13

Soit B une base de E dans laquelle φ est représentée par la matrice (symétrique) A.
L'endomorphisme f de E est un opérateur orthogonal relativement à φ si et seulement si la matrice S qui représente f dans B vérifie :

$$A = {}^tSAS.$$

Quand on applique ce théorème à un opérateur orthogonal dans une base orthonormée, cela donne

Corollaire 2.14

f est un opérateur orthogonal si et seulement si sa matrice S dans une base orthonormée vérifie

$${}^tSS = I_n$$

Corollaire 2.15

Le déterminant d'un opérateur orthogonal est +1 ou -1.

Théorème 2.16 **(et Définition)**

L'ensemble $SO_\varphi(E)$ des opérateurs orthogonaux de E, relativement à φ, dont le déterminant est 1 est un sous-groupe distingué de $O_\varphi(E)$.
On dit que $SO_\varphi(E)$ est le groupe spécial orthogonal de E, relativement à φ.

Preuve du Théorème 2.16:
Il suffit de remarquer que l'application det de $O_\varphi(E)$ dans $\{-1, 1\}$ est un morphisme de groupe. Son noyau $SO_\varphi(E)$ est un sous-gruope distingué de $O_\varphi(E)$. Il faut d'ailleurs remarquer que cela marche encore si l'on part de $GL(E)$, puisqu'on arrive dans $\mathbb{R}^*$.

■

Remarque 2 *Si B est une base orthonormale, $f \in \mathcal{L}(E)$ est un opérateur orthogonal si et seulement si $f(B)$ est une base orthonormale.*

Théorème 2.17

Si B est une base orthogonale, et S la matrice de passage de B dans une autre base B', B' est orthogonale si et seulement si ${}^tSS = I_n$.

Théorème 2.18

Pour une matrice carrée d'ordre n sur un corps commutatif K, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. ${}^tSS = I_n$,
2. $S{}^tS = I_n$,
3. *S est inversible et* $S^{-1} = {}^tS$.

On dit alors que la matrice S est orthogonale.

Corollaire 2.19

S représente un opérateur orthogonal si et seulement si S est une matrice orthogonale.

Remarque 3 *Ca ne coute rien de remarquer qu'une matrice est orthogonale si et seulement si la somme des carrés des éléments de chaque ligne (colonne) vaut 1, et que la somme des produits termes à termes des deux lignes distinctes (colonnes distinctes) vaut 0.*
On peut aussi dire qu'une matrice est orthogonale si et seulement si ses lignes (colonnes) forment une base orthonormée de l'espace vectoriel K^n muni de sa structure canonique.

Remarque 4 *Si S est une matrice orthogonale, en utilisant la matrice des cofacteurs ($S^t(Com(S)) = det(S)I_n$), on trouve en appelant S_{ij} le cofacteur de s_{ij} que*

$$S_{ij} = det(S)s_{ij}.$$

Et comme $det(S)$ vaut +1 ou -1, ...

Remarque 5 *Dans un espace euclidien de dimension finie, une matrice de passage transforme une b.o.n en une b.o.n si et seulement si elle est orthogonale.*

Définition 2.5

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, muni d'une forme quadratique non dégénérée, soit B une base de référence.
On dira qu'une autre base B' a <u>même orientation</u> *que B si le déterminant de la matrice de passage de l'une à l'autre est positif. Dans le cas contraire, on dira qu'elles ont des orientations opposées.*
On distinguera donc les notions d'orientation directe, et d'orientation indirecte.

Définition 2.6

Dans un espace vectoriel euclidien, toute notion qui dépend de l'orientation est une <u>notion axiale</u>.