Problème 3

AI 2014/2015

23 janvier 2015

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, n entier non nul, dont on note $< . >$ le produit scalaire et $||.||$ la norme.
Un endomorphisme f de E est appelé <u>similitude</u> de E s'il existe $k \in \mathbb{R}^{*+}$ tel que, pour tout x de E, $||f(x)|| = k||x||$; la similitude f est dite <u>directe</u> si le déterminant de f est strictement positif.
On désigne par $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E, par $GO(E)$ l'ensemble des similitudes et par $GO^+(E)$ l'ensemble des similitudes directes. Si u est un endomorphisme de E, on note u^* l'adjoint de u.

Partie I

1. Montrer que $GO(E)$ est un sous-groupe du groupe linéaire $GL(E)$ et que $GO^+(E)$ est un sous-groupe de $GO(E)$.

2. Montrer qu'une similitude de E s'écrit d'une manière et d'une seule comme composée d'une homothétie de rapport strictement positif et d'un automorphisme orthogonal de E.

3. (a) Montrer qu'un endomorphisme f de E est une similitude si et seulement si il existe un réel a non nul tel que $\forall (x,y) \in E^2$,
$$< f(x), f(y) >= a < x, y > .$$
   (b) Soit f une application de E dans E telle qu'il existe un réel a non nul tel que $\forall (x,y) \in E^2$,
$$< f(x), f(y) >= a < x, y > .$$
   Calculer $||f(x+y) - f(x) - f(y)||$.
   Montrer que f est une similitude.

4. (a) Montrer que $GO(E)$ est exactement l'ensemble des automorphismes f de E qui transforment deux vecteurs orthogonaux de E en deux vecteurs orthogonaux.
   On pourra utiliser les formes linéaires $x \longmapsto < x, y >$ et $x \longmapsto < f(x), f(y) >$.
   (b) Soit $r \geq 0$; on appelle sphère de rayon r de E l'ensemble des vecteurs $x \in E$ tels que $||x|| = r$.
   Montrer que si f est un endomorphisme non nul de E qui transforme toute sphère de E en une sphère de E, alors f est une similitude.

5. Démontrer qu'un automorphisme f de$E$ est une similitude si et seulement si, pour tout automorphisme orthogonal ω, l'automorphisme $f \circ \omega \circ f^{-1}$ est orthogonal. On pourra utiliser I.3 et une symétrie bien choisie.

6. Si f est une similitude de E, calculer $f \circ f^*$ et $f^* \circ f$.

Partie II

Dans cette partie l'entier n vaut 2.

1. Déterminer l'ensemble, noté $GO(2)$, des matrices de similitude de E dans une base orthonormale donnée ; préciser le sous-ensemble, noté $GO^+(2)$, des matrices de similitude directe.

2. Soit f un endomorphisme de E. Montrer que $f \circ f^* = f^* \circ f$ si et seulement si f est une similitude directe ou un endomorphisme autoadjoint.

3. Soient u et v deux similitudes directes, distinctes d'une homothétie, tels qu'il existe $w \in GL(E)$ vérifiant $v = w \circ u \circ w^{-1}$. Montrer que w est une similitude.

4. Soient $P(X)$ un polynôme unitaire réel du deuxième degré sans racines réelles et

$$F = \{u \in GL(E) / \chi_u = P\},$$

où χ_u est le polynôme caractéristique de u.

   (a) Montrer que F contient exactement deux similitudes directes.
   Montrer que : quel que soit $(f, g) \in F^2$, il existe $h \in GL(E)$ tel que $g = h \circ f \circ h^{-1}$.

   (b) Avec les notations de II.4.a, peut-on choisir $h \in GL(E)$ avec $det(h) > 0$?

Partie III

Dans cette partie , $n = 3$.

1. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^* \circ f = f \circ f^*$.

   (a) Si x est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ, calculer $||f^*(x) - \lambda x||$.

   (b) Si x est un vecteur propre de f, montrer que le plan P orthogonal à x est stable par f.

   (c) Montrer que :
   - ou bien f est autoadjoint,
   - ou bien f a une seule valeur propre réelle, un seul plan stable P et l'endomorphisme induit par f sur P est une similitude directe.

2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Montrer que f a une seule valeur propre réelle notée a, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près ; donner une base de l'espace propre associé.

   (b) Montrer qu'il existe un unique plan P stable par f. On pourra chercher une équation de P.

   (c) Soit u un vecteur non nul de P et $v = f(u)$; montrer que $\mathcal{B} = (u, v)$ est une base de P et écrire la matrice dans $\mathcal{B}$ del'endomorphisme $\tilde{f}$ induit par f sur P.

(d) Montrer que l'application N de P dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$N : (xu + yv) \longmapsto \sqrt{ax^2 + y^2 - a^2xy}$$

est une norme sur P associée à un produit scalaire.

(e) Montrer que l'endomorphisme $\tilde{f}$ est une similitude directe sur P muni de la structure euclidienne associée à la norme N.

Partie IV

Le plan affine euclidien orienté $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}$ orthonormé direct d'origine O. Soient a et b deux réels non nuls donnés avec $b > 0$, t un paramètre réel et S_t la matrice

$$S_t = \begin{pmatrix} e^{at}cos(bt) & -e^{at}sin(bt) \\ e^{at}sin(bt) & e^{at}cos(bt) \end{pmatrix}.$$

On note σ_t la similitude de $\mathcal{E}$ définie par : si M est le point de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathcal{R}$, alors $\sigma_t(M)$ est le point M' de coordonnées (x', y') dans $\mathcal{R}$, tel que :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = S_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Soient M_0 un point de $\mathcal{E}$ différent de O et (x_0, y_0) les coordonnées de M_0.
On appelle Γ la courbe de $\mathcal{E}$ définie dans le repère $\mathcal{R}$ par le paramétrage :

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Montrer que l'application $t \longmapsto S_t$ est un morphisme injectif du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe multiplicatif $GO^+(2)$.

   (b) Déterminer tous les morphsimes de classe $\mathcal{C}^1$ du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe multiplicatif $GO^+(2)$.

2. (a) Déterminer une équation polaire de Γ. Trouver l'image de Γ par l'application σ_{t_0} (t_0 réel fixé). Démontrer que la tangente à Γ en un point M de Γ fait un angle constant avec OM.

   (b) Déterminer un repère de Frenet $(\vec{\tau}, \vec{n})$ et calculer le rayon de courbure ρ en un point M de Γ.

   (c) On appelle D la courbe décrite par le point C défini par $\overrightarrow{MC} = \rho\, \vec{n}$. Montrer que D se déduit de Γ par une similitude de centre O, dont on précisera le rapport et l'angle.

3. On appelle (P) la courbe décrite par le point P projection orthogonale du point O sur les tangentes à Γ. Montrer que (P) se déduit de Γ par une similitude de centre O. Faire un croquis, représentant les courbes Γ, D, (P) et les points étudiés M, C, P, pour $x_0 = 1, y_0 = 0, a = 0.5$ et $b = 1$.