Endomorphismes d'un espace quadratique

1 Dimension quelconque

1.1 Notion d'adjoint

Soit E un espace vectoriel muni d'un forme Φ, de forme polaire non dégénérée φ. On suppose que E n'est pas l'espace trivial. On notera $A^{\perp}$ l'ensemble des éléments de E qui sont conjugués, au sens de φ, avec tout A.

Définition 1.1

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. S'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall (x, y) \in E^2$,

$$\varphi(u(x), y) = \varphi(x, v(y)),$$

on dit que v est un endomorphisme adjoint de u.

Proposition 1.1

Si u admet v comme adjoint, v admet u comme adjoint.

Preuve de la Proposition 1.1:
C'est une conséquence directe de la symétrie de φ.

■

Proposition 1.2

Si u admet un adjoint, celui-ci est unique. On le notera u^*.

Preuve de la Proposition 1.2:
Soient v, w deux adjoints de u. Alors

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, (v - w)(y)) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \forall y \in E, (v - w)(y) \in Ker\varphi = \{0\} \\ &\Longrightarrow \quad v - w = 0_{\mathcal{L}(E)} \end{aligned}$$

■

Exemple scalaire *On considère E l'ensemble des fonctions polynômiales réelles, muni du produit*

$$(x|y) = \int_0^1 x(t)y(t)dt.$$

On remarque que $(t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partie basique de E : elle est génératrice, et toute sous-famille finie est libre.
Soit $f \in E$, alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t}}dt$ existe et est dans $\mathbb{R} \subset E$. On la note $u(f)$, et u est un endomorphisme de E.
Supposons que v un adjoint de u existe, et posons $v(t^0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k t^k$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
(u(t^n), t^0) &= \int_0^1 \int_0^1 t^{n-\frac{1}{2}} dt d\tau \\
&= \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \\
(t^n, v(t^0)) &= \int_0^1 t^n \sum_{k=0}^{p} a_k t^k dt \\
&= \sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{n+k+1}
\end{aligned}$$

Il n'y a pas de cas où il puisse y avoir égalité.

Proposition 1.3

L'ensemble des endomorphismes de E ayant un adjoint est une sous-algègre de $\mathcal{L}(E)$.
L'application de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même, qui à u associe u^* est une application linéaire involutive : $\forall (u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2, \forall \alpha \in K$,

$$(u+v)^* = u^* + v^*$$
$$(\alpha u)^* = \alpha u^*$$
$$(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$$

Proposition 1.4

Si $u \in GL(E)$ et si u et u^{-1} admettent des adjoints, alors $u^* \in GL(E)$ et

$$(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*.$$

Proposition 1.5

> *Si u admet un adjoint, et si H est un sous-espace stable de E, alors $H^{\perp}$ est stable par u^*.*

Preuve de la Proposition 1.5:
Soit $y \in H^{\perp}, \forall x \in H, \varphi(x, u^*(y)) = \varphi(u(x), y) = 0$.

■

Proposition 1.6

> *Si u admet un adjoint, alors*
> 1. *$Keru^* = (Imu)^{\perp}$*
> 2. *$Imu^* \subset (Keru)^{\perp}$.*

Preuve de la Proposition 1.6:

1.

$$\begin{array}{rcl} \text{Soit } y \in Keru^*, \forall x \in E, 0 & = & \varphi(x, u^*(y)) \\ & = & \varphi(u(x), y) \\ & \Longrightarrow & y \in (Imu)^{\perp} \\ \text{Soit } y \in (Imu)^{\perp}, \forall x \in E, 0 & = & \varphi(u(x), y) \\ & = & \varphi(x, u^*(y)) \\ & \Longrightarrow & u^*(y) \in E^{\perp} = \{0_E\} \end{array}$$

2. En transposant, on trouve

$$Imu^* \subset (Imu^*)^{\perp\perp} = (Keru)^{\perp}.$$

■

Remarque 1 *En dimension finie, on a donc l'égalité dans le 2).*

1.2 Endomorphismes symétriques

Définition 1.2

> *Un endomorphisme u de E est symétrique (respectivement antisymétrique) s'il admet un adjoint u^* tel que $u^* = u$ (respectivement $u^* = -u$).*
> *On dit alors qu'il est auto-adjoint.*

Lemme 1.7

Si u une application de E dans E est telle que $\forall (x,y) \in E^2$,

$$\varphi(u(x), u) = \varphi(x, u(y)),$$

alors u est linéaire.

Preuve du Lemme 1.7:
Soit $(x,y) \in E^2$, soit $(\alpha, \beta) \in K^2$, on pose $z = u(\alpha x + \beta y) - \alpha u(x) - \beta u(y)$. $\forall t \in E$,

$$\begin{aligned} \varphi(z,t) &= \varphi(u(\alpha x + \beta y), t) - \alpha\varphi(u(x), t) - \beta\varphi(u(y), t) \\ &= \varphi(\alpha x + \beta y, u(t)) - \alpha\varphi(x, u(t)) - \beta\varphi(y, u(t)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $z \in Ker\varphi$.

■

Ce lemme donne donc une caractérisation des endomorphismes auto-adjoints.

Proposition 1.8

L'ensemble des endomorphismes symétriques, et celui des endomorphismes antisymétriques sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires du K-espace vectoriel des endomorphismes admettant un adjoint.
On les note $S_\varphi(E)$ et $A_\varphi(E)$.

2 Dimension finie

2.1 Généralités

Théoreme 2.9

Tout endomorphisme admet un adjoint.

Preuve du Théoreme 2.9:
Voyons la preuve matricielle : soit e un base de E, $\Omega = Mat(\varphi, e)$.
Soient $(x,y) \in E^2$, de coordonnées X et Y dans e. Alors $\varphi(x,y) = {}^tX\Omega Y$.
Soit u un endomorphisme de E de matrice M dans la base e. Alors

$$\varphi(u(x), y) = {}^tX\,{}^tM\Omega Y.$$

Ω est inversible et ${}^t\Omega = \Omega$. Donc

$$\varphi(u(x), y) = {}^tX\Omega(\Omega^{-1}\,{}^tM\Omega)Y.$$

On introduit l'endomorphisme de matrice $\Omega^{-1}\,{}^t\!M\Omega$ dans la base e, et cet endomorphisme est l'adjoint de u.

■

Corollaire 2.10

$$S_\varphi(E) \oplus A_\varphi(E) = \mathcal{L}(E).$$

Corollaire 2.11

1. *$rgu^* = rgu$,*
2. *$detu^* = detu$,*
3. *H stable par u si et seulement si $H^\perp$ est stable par u^*,*
4. *$Imu^* = (Keru)^\perp$,*
5. *Si e est une base orthonormée de E, $Mat(u^*, e) = {}^t(Mat(u, e))$.*
   u est symétrique si et seulement si sa matrice l'est.
   u est antisymétrique si et seulement si sa matrice l'est.

Proposition 2.12

L'espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur E est isomorphe à $S_\varphi(E)$ par $u \longmapsto \Psi(x, y) = \varphi(x, u(y))$.

Corollaire 2.13

$$dimS_\varphi(E) = \frac{n(n+1)}{2}.$$
$$dimA_\varphi(E) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

3 Cas particuliers

3.1 Projections, symétries

Théoreme 3.14 **(et Définition)**

> *Soit (E, φ) un espace quadratique, p un projecteur de E d'image F et de noyau G. Une condition nécessaire et suffisante pour que p soit symétrique est que $F^{\perp} = G$.*
> *On dit alors que p est un projecteur orthogonal sur F noté p_F, et $id_E - p_F$ est le projecteur orthogonal sur $F^{\perp}$.*

Preuve du Théoreme 3.14:
Si p admet un adjoint alors $Kerp^* = (Imp)^{\perp}$.
Réciproquement, si $G = F^{\perp}$, soit $(x, y) \in E^2$, avec $x' = x - p(x)$ et $y' = y - p(y)$.
$\varphi(p(x), y') = \varphi(x', p(y)) = 0$.
Donc $\varphi(p(x), y) = \varphi(p(x), p(y)) = \varphi(x, p(y))$. Cela implique bien que p est symétrique.
■

Rappels :

Définition 3.3

> *On appelle symétrie de E tout endomorphisme involutif de E.*

Théoreme 3.15

> *Soit p un projecteur d'image F et de noyau G. $s = 2p - id_E$ est un symétrie par rapport à F parallèlement à G.*

Théoreme 3.16

> *Soit s une symétrie. On note $E_+ = Kers - id_E$ et $E_- = Kers + id_E$.*
> *Alors s est la symétrie par rapport à E_+ parallèlement à E_-.*

Preuve du Théoreme 3.16:
Il suffit de remarquer que $X^2 - 1$ est le polynôme minimal de s.
■

Proposition 3.17

> *Deux symétries commutent si et seulement si leur produit est une symétrie.*

Preuve du Théoreme 3.17:
Si $r \circ s = s \circ r$, alors $(r \circ s)^2 = r^2 \circ s^2 = id_E$.
Réciproquement, si $(r \circ s)^2 = id$, en développant, et en utilisant que r et s sont leurs propres inverses, on retrouve qu'elles commutent.

■

Théoreme 3.18 (et Définition)

Soit (E, φ) un espace quadratique, tel que $F \oplus G = E$, et s une symétrie par rapport à F parallèlement à G.
Alors s est symétrique si et seulement si $G = F^{\perp}$.
On dit alors que s est une symétrie orthogonale par rapport à F, et $-s$ est la symétrie orthogonale par rapport à $F^{\perp}$.

3.2 Groupe orthogonal

Effectuons un petit retour sur le groupe orthogonal.

Théoreme 3.19

$u \in O_{\varphi}(E)$ si et seulement si u admet un adjoint et $u^* = u^{-1}$.

Par exemple, les symétries orthogonales sont des opérateurs orthogonaux.

3.3 Similitudes

Théoreme 3.20

L'ensemble des homothéties de E forme un sous-groupe de $GL(E)$ isomorphe à K^*.

Théoreme 3.21 (et Définition)

Soit $u \in GL(E)$, et $\alpha \in K^*$. On dit que u est une similitude de facteur α si (u, α) vérifie ces trois assertions équivalentes :

1. $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(u(x), u(y)) = \alpha \varphi(x, y)$,
2. $\forall x \in E, \Phi(u(x)) = \alpha \Phi(x)$,
3. *u admet un adjoint et* $u^* \circ u = u \circ u^* = \alpha Id_E$.

Proposition 3.22

L'ensemble des similitudes est un sous-groupes de $GL(E)$, noté $GO_\varphi(E)$. Il admet pour sous-groupes distingués $O_\varphi(E)$ et le groupe des homothéties.

Proposition 3.23

Le produit commutatif d'une homothétie et d'un automorphisme orthogonal est une similitude dont le multiplicateur est un carré de α.

Proposition 3.24

Si α est un carré, tout similitude u de multiplicateur α se décompose de deux façons en un produit commutatif d'une homothétie et d'un opérateur orthogonal.

Proposition 3.25

Toute similitude d'un espace quadratique de dimension impaire se décompose de façon unique en un produit d'un opérateur de $SO_\varphi(E)$ et d'une homothétie.

Définition 3.4

Une similitude de multiplicateur α d'un espace quadratique de dimension paire $2m$ est dire <u>directe</u> si $det u = \alpha^m$ et <u>indirecte</u> si $det u = -\alpha^m$.