Devoir: un peu de topologie dans $M_n(\mathbb{R})$

8 novembre 2014

.Rappels : En dimension finie :
- toutes les normes sont équivalentes.
- toutes les applications linéaires sont continues.
- la sphère et la boule unité sont compactes.

1) On considère une nomre N sur $\mathbb{R}^n$ assimilé à $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et on note S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.
Montrer que les trois applications $\|.\|_\infty : A = (a_{i,j}) \mapsto max_{i,j\in\{1,\dots,n\}}(|a_{i,j}|)$, $\|.\|_2 : A \mapsto \sqrt{tr({}^tAA)}$ et $|||.||| : A \mapsto Max_{u\in S}(N(u))$ sont des normes sur $M_n(\mathbb{R})$ et que l'une d'entre elles est même euclidienne.

2) a) Montrer que les applications "coordonnées" $p_{k,l} : A = (a_{i,j})_{i,j\in\{1,\dots,n\}} \mapsto a_{k,l}$ et l'application déterminant sont continues sur $M_n(\mathbb{R})$.
b) montrer que le produit de matrices et la somme de matrices sont des applications continues sur $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$.

3)a) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, montrer que dans la famille $(A + \dfrac{1}{k}I_n)_{k\in\mathbb{N}^*}$ toutes les matrices sont inversibles sauf un nombre fini d'entre elles.

b) Montrer que $Gl_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.

4)a) Montrer que l'ensemble $O(n)$ des matrices orthogonales d'ordre n est une partie compacte de $M_n(\mathbb{R})$.
b) Montrer que l'ensemble $S^+(n)$ des matrices symétriques positives d'ordre n est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.

5)a) montrer que $\forall M \in Gl_n(\mathbb{R}), M^tM$ est symétrique définie positive.
b) monter que pour toute matrice S' symétrique définie positive il existe une unique matrice S symétrique définie positive telle que $S^2 = S'$.
c) Soit $M \in Gl_n(\mathbb{R})$ et Ssymétrique définie positive telle quue $S^2 = M^tM$.
Montrer que $S^{-1}M$ est orthogonale.
d) Montrer que toute matrice $M \in Gl_n(\mathbb{R})$ s'écrit de façon unique sous la forme SO avec S symétrique définie positive et O orthogonale.
e) Montrer que toute matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme SO avec S symétrique positive et O orthogonale.