Agrégation interne de mathématiques 2014-2015,
Université de Toulon,
Thierry Champion

Processus aléatoires discrets - chaînes de Markov

1 Introduction et notations

Dans tout ce sujet, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé et $\mathcal{X} = \{1, \ldots, n\}$ est un ensemble fini.

Définition (Chaîne de Markov). *Une* **chaîne de Markov (homogène)** *est une suite de variables aléatoires* $(X_k)_{k\geq 0}$ *définies sur* Ω *et à valeurs dans* $\mathcal{X}$ *vérifiant :*

- *pour tout* $k \geq 0$, $X_k(\Omega) = \mathcal{X}$*;*
- *la* propriété de Markov *:*

$$\forall k \geq 0, \forall \xi \in \mathcal{X}^{k+2}, \quad \mathbb{P}_{X_k=\xi_k,\ldots,X_0=\xi_0}(X_{k+1} = \xi_{k+1}) = \mathbb{P}_{X_k=\xi_k}(X_{k+1} = \xi_{k+1}).$$

- *l'*hypothèse d'homogénéité *:*

$$\forall k \geq 0, \forall (i,j) \in \mathcal{X}^2, \quad \mathbb{P}_{X_k=i}(X_{k+1} = j) = \mathbb{P}_{X_0=i}(X_1 = j).$$

Intuitivement, la valeur $X_l(\omega)$ représente l'état d'un système à l'étape l pour la réalisation ω d'une expérience aléatoire répétée dans laquelle la probabilité de passer de l'état i à l'état j entre l'étape k et l'étape $k+1$ est indépendante de k et vaut $\mathbb{P}_{X_0=i}(X_1 = j)$. L'ensemble $\mathcal{X}$ est alors l'ensemble des états possibles du système.

Pour tout $k \geq 0$ on note x^k la matrice ligne de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ associée à la loi de X_k, c'est-à-dire

$$x^k \; := \; (\mathbb{P}(X_k = 1), \ldots, \mathbb{P}(X_k = n)).$$

Dans ce problème, $c := \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ désigne la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

Pour tout couple $(i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$ on note $p_{i,j}$ la probabilité $\mathbb{P}_{X_0=i}(X_1 = j)$ de transition de l'état i vers l'état j. La matrice

$$\mathcal{P} \; = \; (p_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$$

est appelée *matrice de transition* de la chaîne de Markov $(X_k)_{k\geq 0}$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que M est *stochastique* si $M_{i,j} \geq 0$ pour tout i,j et

$$\forall i, \quad \sum_{j=1}^{n} M_{i,j} = 1.$$

2 Exemples et premières propriétés

Dans les exemples de ce problème, on ne demande pas d'expliciter l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on supposera son existence.

1. Exemple du *zappeur compulsif*. Soit p et q deux nombres dans $]0,1[$. Un télespectateur commence à regarder la télévision à l'instant 0 et hésite entre deux programmes, respectivement sur la chaîne 1 et la chaîne 2, et à chaque minute il change de chaîne selon la règle suivante : s'il est sur la chaîne 1 il a une probabilité p de changer de chaîne, et s'il est sur la chaîne 2 il a une probabilité q de changer de chaîne. On note X_k la variable aléatoire qui donne le numéro de la chaîne regardée à la minute k. Démontrer que $(X_k)_k$ est une chaîne de Markov et en donner la matrice de transition.

2. Exemple de *l'ivrogne*. Un ivrogne titube le long d'une rue. Toutes les 5 minutes il se déplace d'un angle de la rue à un autre selon les règles suivantes : à chacun des angles de la rue (numérotés $2, 3, 4$) il change de direction avec probabilité $\frac{1}{2}$, aux deux extrémités de la rue se trouvent le bar (en position 1) et sa maison (en 5) auxquels il passe le reste de la nuit s'il les atteint. On note X_k la position de l'ivrogne au bout de $5k$ minutes. Démontrer que $(X_k)_k$ est une chaîne de Markov et en donner la matrice de transition.

3. Soit $\mathcal{P}$ la matrice de transition d'une chaîne de Markov, démontrer que

   (a) la matrice $\mathcal{P}$ est stochastique.

   (b) pour tout i, j dans $\mathcal{X}$ on a $\mathbb{P}_{X_0=i}(X_2 = j) = (\mathcal{P}^2)_{i,j}$.

   (c) plus généralement, pour tous entiers $k > l \geq 0$ on a $\mathbb{P}_{X_l=i}(X_k = j) = (\mathcal{P}^{k-l})_{i,j}$.

   (d) pour tout $k \geq 1$ la matrice $\mathcal{P}^k$ est stochastique.

4. Montrer que pour tout $k \geq 0$ on a $x^k = x_0 \mathcal{P}^k$.

3 Chaînes de Markov absorbantes

Pour i, j dans $\mathcal{X}$, on dit que l'état j est *atteignable* depuis l'état i si il existe $k \geq 1$ tel que $(\mathcal{P}^k)_{i,j} > 0$.
On dit qu'un état i est *absorbant* si $p_{i,i} = 1$ (auquel cas $p_{i,j} = 0$ pour $j \neq i$).
Enfin, on dit qu'une chaîne de Markov est *absorbante* si pour tout état $j \in \mathcal{X}$ il existe un état absorbant atteignable par j.

Dans cette partie, on suppose que $\mathcal{P}$ est la matrice de transition d'une chaîne de Markov ayant $d \geq 1$ états absorbants.

1. Montrer que la chaîne de Markov de l'exemple de l'ivrogne est absorbante.

2. Montrer qu'il existe une permutation σ de $\mathcal{X}$ telle que la matrice $\mathbb{P}^\sigma = (p_{\sigma(i),\sigma(j)})_{i,j}$ est de la forme

   (1) $$\begin{bmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

   où I est la matrice identité de $\mathbb{R}^d$.
   On supposera désormais jusqu'à la fin de cette partie que $\mathcal{P}$ est de cette forme : les états absorbants de la chaîne sont alors les éléments de $\{n-d+1, \ldots, n\}$.
   On admet également que $\lim\limits_{k \to +\infty} Q^k = 0$.

3. Démontrer que $I - Q$ est inversible.

4. On note $N := (I - Q)^{-1}$. Montrer qu'on a $N = \sum_{k=0}^{+\infty} Q^k$.

5. Démontrer que

$$\lim_{y \to +\infty} \mathcal{P}^k = \begin{bmatrix} 0 & NR \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

6. Démontrer que pour tout i, j dans $\{1, \ldots, n-d\}$ on a

$$N_{i,j} = \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} 1_{X_k = j} \mid X_0 = i \right)$$

c'est-à-dire que $N_{i,j}$ est l'espérance du nombre de passage dans l'état j en partant de l'état i. *Remarque : la notation $\mathbb{E}(Y|X_0 = i)$ désigne l'espérance de la variable aléatoire Y lorsque Ω est muni de la probabilité $\mathbb{P}_{X_0 = i}$.*

7. On admet qu'on définit une variable aléatoire τ par la formule suivante :

$$\tau : \omega \mapsto \tau(\omega) := \inf\{k \geq 1 \,:\, X_k(\omega) \geq n - d + 1\}.$$

Cette variable représente le temps s'écoulant avant qu'un état absorbant ne soit atteint. Démontrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, n-d\}$ on a :

$$\mathbb{E}\left(\tau \mid X_0 = i\right) = \sum_{j=1}^{n-d} N_{i,j}.$$

Indication : on peut remarquer que $\bigcup_{j=1}^{n-d} (X_k = j) = (\tau \geq k+1)$.

8. Soit $i \in \{1, \ldots, n-d\}$ un état non absorbant et $j \in \{n-d+1, \ldots, n\}$ un état absorbant.

   (a) Montrer que l'évènement "la chaîne atteint l'état j en partant de i" est égal à

   $$(X_0 = i) \cap \bigcup_{k \geq 0} (X_k \leq n - d \text{ et } X_{k+1} = j)$$

   (b) En admettant que la notation $X_\tau : \omega \mapsto X_{\tau(\omega)}$ définit une variable aléatoire (qui représente l'état absorbant atteint), montrer que

   $$\mathbb{P}_{X_0 = i}(X_\tau = j) = (NR)_{i,j}.$$

   (c) Déduire de ce qui précède la probabilité qu'a l'ivrogne de passer la nuit chez lui en sachant qu'il part de l'angle numéroté 3. Même question en partant de l'angle 2.

4 Chaînes de Markov ergodiques

Une chaîne de Markov est *ergodique* si tout état du j est atteignable depuis tout autre état i. Elle est dite *régulière* si

(2) $$\exists k \geq 1,\ \forall (i,j) \in \mathcal{X}^2, \quad (\mathcal{P}^k)_{i,j} > 0.$$

1. Montrer que la chaîne de Markov du zappeur compulsif est régulière.

2. Exemple du *modèle des urnes d'Ehrenfest*. Quatre boules sont réparties dans deux urnes. À chaque étape de l'expérience, une boule parmi les quatre est choisie au hasard, de manière équiprobable, et est changée d'urne. On note alors X_k le nombre de boules dans la première urne après k étapes.

   (a) En admettant que $(X_k)_{k\geq 0}$ est une chaîne de Markov, en déterminer la matrice de transition.

   (b) Sans faire de calculs, justifier que cette chaîne de Markov est ergodique mais n'est pas régulière.

3. Dans cette question, $\mathcal{P}$ est la matrice de transition d'une chaîne de Markov régulière. On admet que dans ce cas il existe un vecteur ligne $w \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ tel que

$$\lim_{k\to+\infty} P^k = W := \begin{bmatrix} w \\ \vdots \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 & \dots & w_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ w_1 & \dots & w_n \end{bmatrix}.$$

   Ce vecteur w est appelé *distribution stationnaire* de la chaîne.

   (a) Démontrer que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$.

   (b) Soit $x \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ un vecteur ligne tel que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$, montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} xP^k = w.$$

   (c) Montrer que $w = wP$ et que tout vecteur ligne x vérifiant $x = xP$ est colinéaire à w.

   (d) Déterminer la distribution stationnaire dand le cas du zappeur compulsif.

   (e) Montrer que $Pc = c$ et que toute vecteur colonne x vérifiant $x = Px$ est colinéaire à c.

4. Dans cette question, $\mathcal{P}$ est la matrice de transition d'une chaîne de Markov ergodique.

   (a) On pose $Q = \frac{1}{2}(I + \mathcal{P})$ où I est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que Q est une matrice stochastique.

   (b) On considère Q comme la matrice d'une chaîne de Markov : montrer que cette chaîne est régulière.
   Indication : on pourra considérer Q^k où k est un entier tel que, pour tous états i et j, l'état j est atteignable depuis i en au plus k étapes.

(c) On note w la distribution stationnaire de Q, démontrer que $w = wP$ et que tout vecteur ligne x vérifiant $x = xP$ est colinéaire à w. Par conséquent, on désigne également w comme la *distribution stationnaire* de la chaîne de matrice $\mathcal{P}$.

(d) Déterminer la distribution stationnaire dans le cas du modèle d'Ehrenfest.

5. Dans cette question, $\mathcal{P}$ est la matrice de transition d'une chaîne de Markov ergodique de distribution stationnaire w. Pour tout $i \neq j \in \mathcal{X}$, on admet qu'on définit une variable aléatoire τ_j par la formule suivante :

$$\tau_j : \omega \mapsto \tau(\omega) := \inf\{k > 0 \,:\, X_k(\omega) = j\}$$

qui admet une espérance $\mathbb{E}\left(\tau_j \,|\, X_0 = i\right)$. On peut par exemple remarquer que $\mathbb{P}_{X_0=i}(\tau_j = 1) = p_{i,j}$. On note M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par

$$\forall i \neq j,\ M_{i,j} = \mathbb{E}\left(\tau_j \,|\, X_0 = i\right) \quad et \quad \forall i, M_{i,i} = 0$$

Remarque : la variable τ_j représente le temps de premier passage par l'état j.
Pour tout $i \in \mathcal{X}$, on admet qu'on définit une variable aléatoire θ_i par la formule suivante :

$$\theta_i : \omega \mapsto \tau(\omega) := \inf\{k > 0 \,:\, X_k(\omega) = i\}$$

qui admet une espérance $\mathbb{E}\left(\theta_i \,|\, X_0 = i\right)$. On note D la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par $D_{i,i} = \mathbb{E}\left(\theta_i \,|\, X_0 = i\right)$. *Remarque : l'espérance $\mathbb{E}\left(\theta_i \,|\, X_0 = i\right)$ est le temps de premier retour moyen à l'état i en partant de i.*

(a) On note C la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Démontrer que

$$(I - P)M = C - D$$

(b) En déduire que pour tout $i \in \mathcal{X}$ on a

$$\mathbb{E}\left(\theta_i \,|\, X_0 = i\right) = \frac{1}{w_i}.$$

(c) Application : quel est le temps de premier retour moyen à 0 donné $\mathbb{E}\left(\theta_0 \,|\, X_0 = 0\right)$ dans le modèle d'Ehrenfest ?