réduction des endomorphismes

21 octobre 2014

.notions : endomorphismes et matrices trigonalisables et diagonalisables, endomorphismes symétriques et réduction en base orthonormée, polynôme caractéristique et minimal, coniques, quadriques, systèmes différentiels linéaires, récurrence linéaire à n rangs, puissances de matrices, familles de vecteurs propres, espace propre, espace caractéristique, spectre, matrice orthogonale.

EXERCICE 0 (famille de vecteurs propres) mq la famille $(x \mapsto e^{ax})_{a\in\mathbb{R}}$ de vecteurs de $C^\infty(\mathbb{R})$ est libre.

EXERCICE 1 (quelques réductions de matrices utilisées après)
diagonalisez (ou trigonalisez si la diagonalisation n'est pas possible) les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
On déterminera aussi les matrices de changement de base associées aux réductions.

EXERCICE 2 (calculs de puissances)
déterminer en fonction de l'entier naturel n l'expression de A^n.

EXERCICE 3 (puissances)(suites récurrentes linéaires à n rangs)
considérons une suite complexe u vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_{n+2} - u_{n+1} + u_n$.
Pour tout entier naturel n on pose $U(n) = \begin{pmatrix} u(n+2) \\ u(n+1) \\ u(n) \end{pmatrix}$.
a)Montrer que U vérifie une relation du type $\forall n \in \mathbb{N}, U(n+1) = MU(n)$ où M est une matrice que l'on déterminera et que l'on diagonalisera.
b) En déduire l'expression générale de $u(n)$ en fonction de $n, u(0)$ et $u(1)$ et faire le lien avec la methode usuelle de résolution.
c) D'où vient selon vous le terme nq^n proposé par la méthode usuelle de résolution lorsque q est racine double du polynôme caractéristique de la relation de récurrence ?

EXERCICE 4 (puissances) (nombre de trajets en n pas reliant un point d'un graphe à un autre)
A un graphe orienté à 3 sommets on associe une matrice $(3,3)$ obtenue en mettant en ligne i colonne j le nombre d'arrêtes allant du sommet i au sommet j.
Considérons maintenant le graphe orienté G à 3 sommets dont la matrice associée est la matrice A de l'exercice 1.
a) Montrer que le coefficiant d'indices i,j de A^2 est le nombre de façons qu'il y a d'aller du sommet i au sommet j en empruntant exactement 2 arrêtes du graphe G.
b)Pour $k \in \mathbb{N}^*$ montrer que le coefficiant d'indices i,j de A^k est le nombre de façons qu'il y a d'aller du sommet i au sommet j en empruntant exactement k arrêtes (pas forcément distinctes) du graphe G
c)Combien y a t'il de façons de relier le sommet 1 au sommet 3 en empruntant exactement 100 arrêtes ?

EXERCICE 5 (puissances)(inspiré d'un article du site de IG sur les matrices intergénérationnelles à l'adresse « http ://igmaths.infos.st/spip/spip.php ?article66 »)
Dans un pays imaginaire les économistes ont défini trois catégories socio-professionnelles numérotées de 1 à 3.
Ils ont voulu observer les fils issus des pères appartenant à chaque catégorie pour déterminer ceux qui s'orientent vers une catégorie socio-professionnelle différente de celle du père et ceux qui restent la même catégorie socio-professionnelle.
Pour cela ils ont construit une matrice $(3,3)$ dont le coef d'indice (i,j) indique le rapport entre le nombre de salarié de la catégorie i à une génération donnée et le nombre de salariés de la génération suivante issus de la catégories i mais choisissant un travail de la catégorie j.
Par soucis de simplicité on supposera que la matrie obtenue par les économistes est la matrice A de l'exo 1.
Ainsi en observant la première ligne de A on apprend que dans la catégorie 1 la génération suivante est trois fois plus nombreuse et que seul un tiers des individus issus de la classe 1 choisissent la même classe, aucun ne choisit la classe 2 et deux tiers des individus issus de la classe 1 choisissent la classe 3.
On suppose qu'aujourd'hui les trois classes ont le même effectif. Qu'en sera t'il dans 10 générations ?

EXERCICE 6 (puissances) Montrer que si $M \in M_n(\mathbb{C})$ a toutes ses valeurs propres de module strictement inférieur à 1 alors $\lim_{k \to +\infty} (M^k) = 0$.

EXERCICE 7 (systèmes différentiels linéaires)
On assimile ici $\mathbb{R}^2$ à l'ensemble des matrice colonnes à deux lignes.
Déterminer l'ensemble des fonctions $Y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \end{array}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $u' = Bu$ où B désigne la matrice B de l'exercice 1.

EXERCICE 8 (réduction des coniques et quadriques)
Déterminer la quadrique d'equation $x^2+y^2+4xz+2yz+x+y-1=0$ après réduction
.

EXERCICE 9 (extréma locaux pour fonctions de deux variables)
a) La fonction $f : (x, y) \mapsto -2\cos(x) + y(x + sin(y))$ admet elle un extremum au point $(0, 0)$?
Tracer l'allure de f au voisinage de ce point.
b) même question avec $g : (x, y) \mapsto -\cos(x) + y^2 - 2xy$

EXERCICE 10 (endomorphismes qui commuttent et réduction)
Dans cet exercice E désigne un ev de dim finie.
1)Montrer que si $u, v \in L(E)$ commuttent tout sous espace propre de l'un est stable par l'autre. Idem pour les espaces caractéristiques.
2)Montrer que si $u_1, u_2, .., u_l \in L(E)$ commuttent et sont diagonalisables alors il existe une base dans laquelle les matrices des u_i sont simultanément diagonales (on pourra faire une récurrence sur la dimension de E).
3)On suppose ici que le polynôme caractéristique de $u \in L(E)$ est scindé.
a)Rappeler le théorème de décomposition des noyaux, puis ecrire l'allure de la matrice de u dans une base adaptée à l'ecriture de E comme somme directe des sous-espaces caractéristiques de u (aide la matrice obtenue est diagonale par blocs et chaque bloc est triangulaire supérieur).
b)Montrer qu'il existe un unique couple $(d, n) \in L(E)^2$ avec d diagonalisable et n nilpotente tel que d et n commuttent et $u = d + n$.

EXERCICE 11 (racines carrées de matrices symétriques)
1)a)Soit A est une matrice carrée, P un polynôme et λ un scalaire . Montrer que si λ est valeur propre de A alors, $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(A)$.
b)Montrer que pour toute matrice symétrique M réelle définie positive il existe une unique matrice S symétrique telle que $S^2 = M$.
2) Montrer que toute matrice carrée N inversible rélle se décompose de façon unique sous la forme SO avec S symetrique réelle et O orthogonale.

Piste pour l'oral : Voir aussi matrices d'inertie en physique et variante de l'exo 4 avec marche aléatoire dans le graphe.