DIMENSION MATRICES SYSTEMES.

Notions: dimension, base extraite, base incomplète, matrice d'appli lin, chgt de base, systèmes.

1. Soit f un endomorphisme du $\mathbb{R}$ espace classique $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
Montrer qu'il existe un couple (a, b) de complexes tel que: $\forall\, z \in \mathbb{C}\;\; f(z) = a.z + b.\bar{z}$.

2. extraire une base de R^3 de la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$.

.

3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace de dimension 4 décomposé sous la forme $E = \mathrm{Vec}_R(a,b) \oplus \mathrm{Vec}_R(c,d)$.
Peut on en déduire $E = \mathrm{Vec}_R(a+c) \oplus \mathrm{Vec}_R(b, d, c-a)$?
Que se passe t-il si on supprime l'hypothèse sur la dimension de E ?

4. Soit E un $\mathbb{R}$ espace de dimension infinie, F et P deux sous-espaces de E tels que $E=F\oplus P$ avec $\dim_R(P)=2$. Montrer que tout autre sous-espace G supplémentaire de F dans E c'est à dire tel que $E=F\oplus G$ est nécessairement de dimension 2. (on pourra exhiber un isomorphisme de G dans F)

5. Dans $\mathbb{R}_3[X]$ quel est le rang du système constitué par les 5 polynômes :
$P_1=1+2X-X^2+X^3$; $P_2= 2+7X+2X^3$; $P_3=5+X-11X^2+5X^3$; $P_4=-1+X+3X^2-X^3$;
$P_5=-5-4X+9X^2-5X^3$

6. E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E.
Montrer que la suite des $(\mathrm{Ker}(f^k))$ est stationnaire et qu'à partir d'une certaine valeur de k on a :
$E=\mathrm{Ker}(f^k)\oplus \mathrm{Im}(f^k)$

7. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

8. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer l'expression générale de A^n pour n entier naturel quelconque puis en déduire celle de B^n.

9. On considère l'application f de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui fait correspondre à tout polynôme P(X) l'image $Q(X)=P(1).X^2-P'(X)$.

a) Montrer que f est linéaire puis déterminer sa matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

b) Déterminer le noyau et l'espace image de f.

10. Soit E un $\mathbb{R}$-espace de dimension 3 rapporté à la base $\mathcal{B}=(e_1, e_2, e_3)$. On note f l'endomorphisme de E représenté dans $\mathcal{B}$ par la matrice $A=\begin{pmatrix} -14 & 16 & 10 \\ -11 & 13 & 8 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

a) Déterminer le noyau et l'image de f.

b) On note $u_1 = e_1 + e_2$; $u_2 = e_1 - e_2 + 3e_3$; $u_3 = 2e_1 + e_2 + e_3$. Montrer que $\mathcal{B}$'$=(u_1, u_2, u_3)$ est une base de E et déterminer la matrice représentant f dans cette nouvelle base.

c) Montrer que f^3-f^2-$2f$=0.

d) Déterminer l'expression générale des coefficients de A^n pour n entier naturel .

11. Soient E,F,G des ev de dim finie, $u \in L(E,F)$ et $v \in L(E,G)$.

mq $\ker(u) \subset \ker(v) \Leftrightarrow \exists w \in L(F,G), \quad v = w \circ u$.

12. On considère l'endomorphisme T de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui fait correspondre à tout polynôme P(X) l'image Q(X)=P(X+1).

a) Déterminer la matrice M de T dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

b) Montrer que M est inversible et déterminer M^{-1}.

13. f désigne un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

a) On suppose qu'il existe un entier k non nul tel que f^k=0 et $f^{k-1} \neq 0$.
Montrer qu'il existe un vecteur a de E tel que le système $(a, f(a), f^2(a), \ldots, f^{k-1}(a))$ soit libre.

b) On suppose E de dimension finie n. Montrer que si l'endomorphisme f est nilpotent, c'est à dire si une puissance de f s'annule, alors nécessairement f^n=0.

14. E, F, G désignent trois $\mathbb{K}$ espaces de dimension finie. Soient $f \in \mathcal{L}_K(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}_K(F, G)$.

1) Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f)=g(\mathrm{Im}(f))$ en déduire que $\mathrm{rang}(g \circ f)=\dim(g(\mathrm{Im}(f)))$(à utiliser dans la suite).

2) Montrer que $\mathrm{rang}(g \circ f) \leq \min(\mathrm{rang}(f), \mathrm{rang}(g))$.

3) Etablir l'équivalence : $\mathrm{rang}(g \circ f)=\mathrm{rang}(f) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)=\{0_F\}$

4) Etablir l'équivalence : $\mathrm{rang}(g \circ f)=\mathrm{rang}(g) \Leftrightarrow F=\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Ker}(g)$.

15. E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. $f \in \mathcal{L}_K(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}_K(F, G)$.

1) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$

2) Montrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f)=f^{-1}(\mathrm{Ker}(g))$

3) Montrer que $\dim_K(\mathrm{Ker}(g \circ f) \leq \dim_K(\mathrm{Ker}(f))+\dim_K(\mathrm{Ker}(g)$

4) Etablir l'équivalence $\dim_K(\mathrm{Ker}(g \circ f)=\dim_K(\mathrm{Ker}(f))+\dim_K(\mathrm{Ker}(g)) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Im}(f)$

5) Montrer que $\mathrm{rang}(g \circ f) \geq \mathrm{rang}(f)+\mathrm{rang}(g)-\dim_K(F)$.