Agrégation Interne – Université de Toulon

# FORMULE SOMMATOIRE DE POISSON
# MATHS 2, MINES-PONTS 2012, LÉGÈREMENT MODIFIÉ

T. CHAMPION

L'objectif de ce problème est d'établir sous quelles conditions la formule sommatoire de Poisson est vraie et d'en étudier certaines applications.

Les fonctions considérées dans ce problème sont toutes définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{L}$ l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$, et $\mathcal{L}^*$ l'espace vectoriel des fonctions continues $f$ telles qu'il existe $\alpha > 1$ pour lequel la fonction $x \mapsto |x|^\alpha f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

## A. Préliminaires

La *transformée de Fourier* de $f \in \mathcal{L}$ est la fonction $\widehat{f}$ définie par la formule :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi x\xi} dx.$$

**1.** Justifier que pour tout $f \in \mathcal{L}$ , $\widehat{f}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

On désigne par $\mathcal{W}$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{L}$ telles que $\widehat{f} \in \mathcal{L}$ , et par $\mathcal{W}^*$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{L}^*$ telles que $\widehat{f} \in \mathcal{L}^*$.

**2.** Établir que $\mathcal{W}$ et $\mathcal{W}^*$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$, vérifiant l'inclusion $\mathcal{W}^* \subset W$.

Étant donnés $f \in \mathcal{L}$, $\alpha > 0$ et $y, \nu \in \mathbb{R}$ on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = f(\alpha x)$ et $f_{y,\nu}(x) = f(x + y)e^{-2i\pi\nu x}$.

**3.** Déterminer les transformées de Fourier de $f_\alpha$ et $f_{y,\nu}$ en fonction de $\widehat{f}$. En déduire que si $f$ appartient à $\mathcal{W}$ (resp. $\mathcal{W}^*$) alors il en est de même de $f_\alpha$ et $f_{y,\nu}$.

**4.** Calculer les transformées de Fourier des fonctions $s$ et $t$ définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par les formules

$$s(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$t(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**5.** Montrer que $\mathcal{W}^*$ et $\mathcal{W}$ sont distincts de $\mathcal{L}$. On pourra pour cela s'aider de la fonction $s$ définie à la question précédente.

**6.** Soit $(f_n)_n$ est une suite de fonctions de $\mathcal{W}$ convergeant en moyenne vers une fonction $f \in \mathcal{W}$ (c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)|dx = 0$), montrer que la suite $(\widehat{f_n})_n$ converge vers $\widehat{f}$ uniformément sur $\mathbb{R}$.

## B. Formule sommatoire de Poisson

Soit $f \in \mathcal{L}^*$ . Sa périodisée $\tilde{f}$ est définie par la formule $\tilde{f}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$.

**7.** Montrer que $\tilde{f}$ est bien définie, 1-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

**8.** Déterminer, en fonction de $\widehat{f}$, les coefficients de Fourier de $\tilde{f}$ définis pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par la formule

$$c_n(\tilde{f}) = \int_0^1 \tilde{f}(x) e^{-2i\pi nx} dx.$$

**9.** La série de Fourier $S(\tilde{f})$ de la fonction $\tilde{f}$ est donnée pour $\xi \in \mathbb{R}$ par

$$S(f)(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\tilde{f}) e^{2i\pi n\xi}$$

A l'aide de la question précédente, démontrer que $S(\tilde{f})$ est bien définie, 1-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

On rappelle que si deux fonctions continues périodiques ont les mêmes coefficients de Fourier, alors elles sont égales.

**10.** Montrer que si $\widehat{f} \in \mathcal{L}^*$, alors $\tilde{f}$ est égale à la somme de sa série de Fourier.
En déduire, pour tout $f \in \mathcal{W}^*$ , la *formule de Poisson* :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n).$$

*Les parties suivantes donnent diverses applications de la formule de Poisson.*

## C. Application à la formule d'inversion de Fourier

Soit $f \in \mathcal{W}^*$.

**11.** En appliquant la formule de Poisson à la fonction $f_{x,\xi}$ définie dans la partie A, établir la généralisation suivante, pour tous réels $x$ et $\xi$ :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) e^{-2i\pi n\xi} \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n+\xi) e^{2i\pi x(n+\xi)}.$$

Montrer que cette formule donne un développement en série de Fourier de la fonction périodisée $\tilde{F_x}$ , où $F_x$ est la fonction définie par $F_x(\xi) = \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi x\xi}$.

**12.** En déduire la formule d'inversion de Fourier :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi x\xi} d\xi.$$

On pourra pour cela interpréter le second membre comme un coefficient de Fourier particulier de $F_x$.

**13.** Montrer que pour tout réel $x$ on a $\widehat{(\widehat{f}\,)}(x) = f(-x)$.

On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de la transformation de Fourier dans $\mathcal{W}^*$ s'il existe $f \in \mathcal{W}^*$ non nulle telle que $\widehat{f} = \lambda f$.

**14.** Montrer que toute valeur propre de la transforation de Fourier est une racine quatrième de l'unité, puis déterminer toutes les valeurs propres réelles de cette transformation dans $\mathcal{W}^*$. On pourra considérer les combinaisons linéaires $t + \widehat{t}$ et $t - \widehat{t}$ où $t$ est définie à la question **4**.

### D. Application au théorème d'échantillonnage de Whittaker

**15.** On considère une fonction $f \in \mathcal{W}^*$ telle que $\widehat{f}$ s'annule en dehors de l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. En utilisant la formule généralisée de Poisson vue à la question **11**, montrer que $f$ est déterminée de façon unique par la donnée de la suite des échantillons $(f(n))_{n\in\mathbb{Z}}$.

**16.** On va démontrer que le résultat précédent ne subsiste pas si l'on suppose seulement que $\widehat{f}$ s'annule en dehors d'un intervalle $[-\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon]$ pour $\varepsilon > 0$.
Soit $\varepsilon \in ]0, \frac{1}{2}]$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $g : \xi \mapsto t(\frac{\xi - \frac{1}{2}}{\varepsilon}) - t(\frac{\xi + \frac{1}{2}}{\varepsilon})$ et on considère la fonction $f : x \mapsto -\widehat{g}(-x)$. Montrer que $\widehat{f}$ s'annule en dehors de l'intervalle $[-\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon]$, et que $f(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Conclure.

### F. Application à la resommation d'Ewald

On note $g$ la fonction gaussienne définie sur $\mathbb{R}$ par la formule $g(x) = e^{-\pi x^2}$, et l'on admet que $\widehat{g} = g$.
En appliquant la formule de Poisson à $h : x \mapsto g(\frac{x}{100})$, donner une valeur approchée de la somme de la série $S = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi\left(\frac{n}{100}\right)^2}$ à $10^{-10000}$ près.