METHODES GENERALES EN ALGEBRE LINEAIRE:

notions travaillées: sous espaces vectoriels, applications linéaires, noyau/image,sommes de sev (directes ou non), projecteurs et symétries, familles de vecteurs (libres, génératrices, bases)

1. Dans le $\mathbb{R}$ espace classique E=$\mathbb{R}_2$[X] des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2 on considère la partie A formée par les polynômes P tels que P(1)=P'(2).

   a) Montrer que A est un sous espace de E et déterminer en une base.
   b) On note B le plan vectoriel engendré par le couple (1, X^2). Montrer que E est somme des sous espaces A et B. S'agît il d'une somme directe ?

2. Soit $\mathcal{S}$ le $\mathbb{R}$ espace usuel des suites à valeurs réelles.

   a) Montrer que l'ensemble des suites géométriques de raison 2 est une droite de $\mathcal{S}$.
   b) Montrer que l'ensemble des suites arithmétiques est un plan vectoriel de $\mathcal{S}$.
   c) L'ensemble des suites géométriques est il un sous espace de $\mathcal{S}$?

3. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère le sous-ensemble E des triplets du type $(x+y-3z, x+2y-t, t+x-z)$, les coefficients x, y, z, t pouvant prendre toute valeur réelle.
   Montrer que E est un sous-espace vectoriel et déterminer en une base.

4. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs de E et S le système défini par les trois vecteurs $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b}; \vec{v} = \sqrt{5}\vec{a} - \vec{b}; \vec{w} = \vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$.
   Montrer que S est lié et donner une relation de dépendance linéaire précise entre ses vecteurs.

5. On considère l'application de $\mathbb{R}_2$[X] dans $\mathbb{R}_2$[X] , $g : P(X) \mapsto P(1-X)$ et l'ensemble F={P $\in \mathbb{R}_2$[X] tel que P=g(P)}

   a) Montrer que g est une symétrie. b) Montrer que F est un sous espace de E et déterminer en une base.
   c) Montrer que E=F⊕$\mathrm{Vec}_{\mathbb{R}}$(X).

6. Soit f l'application de $\mathbb{R}_3$[X] vers lui même qui associe à tout polynôme P l'image Q= f(P) définie par la formule : Q(X)=3P(X)-(X+1)P'(X)

   a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3$[X].
   b) f est elle injective?
   c) Déterminer Ker(f) et Im(f).

7. On note E le $\mathbb{R}$ espace classique des suites à valeurs réelles et on considère l'application T de E vers E qui transforme tout élément u de E en la suite v= T(u) de terme général défini par : $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n=3u_{n+1}-2u_n$

   a) Montrer que T est $\mathbb{R}$ linéaire.
   b) T est elle injective?
   c) Montrer que T est surjective.

8. Soit f un élément de $\mathcal{L}_K(E,F)$. Montrer que si A est sous espace de E : $f^{-1}(f(A))=A+\mathrm{Ker}(f)$

9. On considère l'application g de $\mathbb{R}_3[X]$ vers lui même qui fait correspondre à tout élément P de cet espace le polynôme $Q= g(P)$ défini par : $Q(X)=\dfrac{P(1)}{2}(X^2-3)+P(X)$

Montrer que g est une projection. Déterminer son support et sa direction.

10. Dans le $\mathbb{R}$-espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ on considère f_1, f_2, f_3 définies par les formules : $f_1(x)=\sin(x+1)$; $f_2(x)=\sin(x-1)$; $f_3(x)=\sin(x+2)$.

a) Le système S formé par ces trois fonctions est-il libre ?
b) Déterminer une base de $E=\mathrm{Vec}_{\mathbb{R}}(S)$.
c) Déterminer les composantes de la fonction $x\mapsto\sin(x)$ dans la base précédente.

11. Soit $S=(e_1, e_2,\dots, e_n)$ un système libre d'un $\mathbb{C}$ espace E.
Le système $S'=(e_1+e_2, e_2+e_3,\dots, e_{n-1}+e_n, e_n+e_1)$ est-il également libre ?

12. Dans le $\mathbb{R}$-espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ montrer que le système de n vecteurs définis par les formules : $\sin(x)$, $\sin(2x)$, …., $\sin(nx)$, est libre quel que soit l'entier n non nul.
(On pourra procéder par récurrence et mettre à profit l'outil de la dérivation.)
Idem avec $\sin(x),\sin^2(x),\sin^3(x),\dots,\sin^n(x)$ (penser DL)

13. Montrer que tout système $S=(P_1, P_2,\dots, P_n)$ de polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{K}$ dont les degrés sont tous distincts deux à deux est nécessairement libre.

14. Soit $E=F\oplus\mathrm{Vec}_{\mathbb{R}}(a)$ somme directe d'un sous espace F de E avec une droite vectorielle engendrée par le vecteur a de E.
Montrer que tout sous espace G de E tel que $E=F\oplus G$ est nécessairement une droite vectorielle.