Quelques compléments de dualité.

Définition 0.1

Soit E un K-espace vectoriel. On considère l'application $\begin{array}{ccc} E^* \times E & \longrightarrow & K \\ (f,x) & \longmapsto & f(x) \end{array}$.
Cette application est bilinéaire. On la note $< f, x >$, et on la nomme *crochet de dualité.*

Remarque 1 *Si P est la matrice de changement de base d'une base B vers une base B', alors P^{-1} est la matrice de passage de leurs bases duales.*

On peut aussi définir une orthogonalité dans E^* :

Définition 0.2

Soit $\varphi \in E^*$. On définit l'orthogonal de φ, et on le note φ° par

$$\varphi^\circ = \{x \in E / < \varphi, x >= 0\}.$$

Si $A^* \subset E^*$, alors

$$A^{*\circ} = \{x \in E / \forall \varphi \in A^*, < \varphi, x >= 0\}.$$

Proposition 0.1

$$A \subset (A^\perp)^\circ.$$

Proposition 0.2

En dimension finie, $dimF + dimF^\perp = dimE$, et $dimG^* + dim(G^*)^\circ = dimE$. De plus $G^* = (G^{*\circ})^\perp$.

Définition 0.3

Soit $x \in E$. On considère l'application $\begin{array}{ll} E^* & \longrightarrow K \\ \varphi & \longmapsto <\varphi, x> \end{array}$.
Cette application est linéaire, et on la note $\Psi(x)$. C'est une forme linéaire sur E^* : elle est donc dans E^{**}.

Théoreme 0.3

Soit $\begin{array}{ll} E & \longrightarrow E^{**} \\ x & \longmapsto \Psi(x) \end{array}$. *Cette application est linéaire, et est l'application canonique de E dans E^{**}.*
C'est un isomorphisme en dimension finie.

Théoreme 0.4 (et Définition)

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, et
$\begin{array}{lll} {}^t u : & F^* & \longrightarrow E^* \\ & \varphi & \longmapsto {}^t u(\varphi) = \varphi \circ u \end{array}$.
Cette application est linéaire.
L'application $\begin{array}{lll} {}^t : & \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow \mathcal{L}(F^*, E^*) \\ & u & \longmapsto {}^t u \end{array}$ *s'appelle la* <u>*transposition*</u>.
En dimension finie, c'est un isomorphisme.

Proposition 0.5

- ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$.
- ${}^t Id_E = Id_{E^*}$
- ${}^t(u^{-1}) = ({}^t u)^{-1}$
- $Ker\, {}^t u = (Im u)^{\perp}$

On considère Ψ_E et Ψ_F les deux applications canoniques de E et F dans leurs biduaux, $\forall u \in \mathcal{L}(E, F)$, ${}^t({}^t u) \in \mathcal{L}(E^{**}, F^{**})$ vérifie

$$ {}^t({}^t u) \circ \Psi_E = \Psi_F \circ u. $$

Ce qui donne le schéma de décomposition suivant :

$$\begin{array}{cccc} & E & \overset{u}{\longrightarrow} & F & \\ \Psi_E & \downarrow & & \uparrow & \Psi_F^{-1} \\ & E^{**} & \underset{{}^t({}^tu)}{\longrightarrow} & F^{**} & \end{array}$$

On peut remarquer que si E=F, en dimension finie, on trouve, après avoir identifié E à son bidual que ${}^t({}^tu) = u$.
Il ne reste plus qu'à voir ce que personne n'a de problème pour se rappeler :

Théoreme 0.6

Soit B une base de E, B' une base de F, et B^* et B'^* les deux bases duales, alors

$$Mat({}^tu, B'^*, B^*) = {}^t(Mat(u, B, B')).$$

où la transposée de la matrice est l'opérateur habituel.

Formes quadratiques

1 Formes quadratiques

1.1 Généralités

Définition 1.4

Soit φ une forme bilinéaire symétrique. On introduit

$$\begin{array}{rlcl} \Phi : & E & \longrightarrow & K \\ & \vec{x} & \longmapsto & \varphi(\vec{x}, \vec{x}) \end{array}$$

Φ est appele la <u>forme quadratique associée à φ</u>, et φ la <u>forme polaire</u>.

Proposition 1.7

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda \vec{x}) &= \lambda^2 \Phi(\vec{x}) \\ \varphi(\vec{x}, \vec{y}) &= \frac{1}{2}(\Phi(\vec{x} + \vec{y}) - \Phi(\vec{x}) - \Phi(\vec{y})) \qquad (1) \\ &= \frac{1}{4}(\Phi(\vec{x} + \vec{y}) - \Phi(\vec{x} - \vec{y})) \\ \Phi(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) &= \lambda^2 \Phi(\vec{x}) + 2\lambda\mu\varphi(\vec{x}, \vec{y}) + \mu^2 \Phi(\vec{y}) \end{aligned}$$

Définition 1.5

Soit E un K-espace vectoriel. $\Phi : E \longrightarrow K$ est une forme quadratique si

1. *$\Phi(\lambda \vec{x}) = \lambda^2 \Phi(\vec{x})$,*
2. *$\Phi(\vec{x} + \vec{y} - \Phi(\vec{x}) - \Phi(\vec{y}))$ est une forme bilinéaire symétrique.*

C'est (1) qui assure l'équivalence des deux définitions.

<u>**Exemple**</u> *: $f \in E^*, \varphi(x, y) = f(x).f(y)$ est une forme bilinéaire symétrique.*

Remarque 2 *Il suffit pour connaitre φ ou Φ de connaitre $\varphi(e_i, e_j)$.*
Si $M = (m_{ij} = \varphi(e_i, e_j))$, et si x a pour coordonnées le vecteur colonne X dans la base, et y, Y alors

$$\varphi(x, y) = {}^t X M Y$$

On peut remarquer que cette matrice est symétrique ($^tM = M$).
Si maintenant, on considère une autre base B' et P la matrice de passage de B vers B' : i.e $X = PX'$, si enfin M' est la matrice de φ dans la base B', alors

$$M' = {}^tPMP$$

On peut donc remarquer qu'elles sont congruentes (c'est une relation d'équivalence) : cela veut dire qu'elles ont même rang, et que leurs déterminants sont liés par la relation suivante :

$$detM' = detM(detP)^2.$$

Définition 1.6

> *On appelle rang d'une forme quadratique le rang commun de toutes les matrices qui déterminent sa forme polaire.*

Définition 1.7

> *Si M est la matrice de Φ dans la base B, on dit que $Det(M)$ est le discréminant de Φ dans cette base.*

Remarque 3

1. *L'ensemble des formes quadratiques est un espace vectoriel, mais pas une algèbre.*
2. *On peut voir φ comme un polynôme homogène de degré 2 à $2n$ inconnues, symétrique au sens où le coefficient de x_iy_j est le même que le coefficient de x_jy_i.*
3. *Il est plus simple de remarquer que pour Φ, il y a un isomorphisme entre les formes quadratiques et les polynômes homogènes de degré 2 à n inconnues. Cet isomorphisme est bien évidemment à base B fixée.*

1.2 Ensembles et Vecteurs particuliers

On ne se situe pas forcément en dimension finie.

Définition 1.8

> *x est un vecteur isotrope si $\Phi(x) = 0$.*
> *On appelle l'ensemble des vecteurs isotropes le cône isotrope.*

Définition 1.9

> Φ *est dite définie si le cône isotrope est réduit à 0.*

Définition 1.10

> x *et* y *sont dit conjugués si* $\varphi(x, y) = 0$. *On emploiera le terme orthogonal lorsqu'il s'agit d'un produit scalaire.*

Remarque 4 *Cette définition de l'orthogonalité est cohérente avec celle de la dualité, puisque le crochet de dualité est une forme bilinéaire. En fait, l'orthogonalité apparait dès le début sur les formes bilinéaires non nécessairement symétriques, ce qui nécessite de distinguer les orthogonalités par rapport aux deux variables.*

Théoreme 1.8 (et Définition)

> *On appelle* $\overline{a}$ *le sous-espace vectoriel des vecteurs qui sont conjugués à* a.
> *De même, on définit le sous-espace conjugué à une partie* A *de* E*, lequel est le même que le sous-espace conjugué au sous-espace vectoriel engendré par cette partie.*

Définition 1.11

> *On appelle noyau de* φ *noté* $Ker\varphi$ *le sous-espace conjugué de* E
> *On dit que* φ *est non dégénérée si ce noyau est réduit à* $\{0\}$.

Remarque 5

- $x \in Ker\varphi \Longrightarrow x$ *isotrope.*
- Φ *définie* $\Longrightarrow \varphi$ *non dégénérée.*

Exemple *Sur* $\mathbb{R}^2$, *on considère la forme quadratique* Φ *associée au polynôme* $F(x, y) = 2xy$ *dans la base canonique. Le noyau est réduit à 0, mais les deux vecteurs de base sont isotropes.*

2 Classification

2.1 Etude d'une forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension finie

Théoreme 2.9

> *Soit Φ une forme quadratique sur un espce-vectoriel E de dimension finie n. Alors il existe une base de E composée de vecteurs deux-à-deux conjugués par Φ.*

Preuve du Théoreme 2.9:
Cette preuve est à connaitre : le moteur en est le suivant :
on considère une base $e_1, e_2, ..., e_n$ dont le premier vecteur n'est pas isotrope : une telle base existe (base incomplète) dès que Φ n'est pas la forme nulle. Dans le cas contraire, n'importe quelle base convient.
Cherchons λ tel que $\varphi(e_1, e_2 + \lambda e_1) = 0$. Un calcul montre qu'il faut prendre $\lambda = -\dfrac{(e_1, e_2)}{\Phi(e_1)}$. On procède de même pour les autres vecteurs de la base,et on obtient une nouvelle base dont tous les vecteurs sont conjugués à e_1, sauf lui-même. Le sous-espace vectoriel engendré est conjugué à e_1 et de dimension $n-1$.
On procède par récurrence.

$\blacksquare$

Si maintenant on s'intéresse à la matrice de Φ dans cette base, on s'aperçoit qu'elle est diagonale.

Théoreme 2.10

> *Toute matrice symétrique est congruente à une matrice diagonale.*

Toujours grâce à l'existence d'une base conjuguée (orthogonale je vous rappelle), on a le théorème suivant pour pas cher :

Théoreme 2.11

> *Toute forme quadratique Φ sur un espace vectoriel de dimension finie peut s'exprimer comme une combinaison linéaire, à coefficients non nuls, des carrés de formes linéaires indépendantes. Dans toute décomposition de ce type, le nombre de formes linéaires est exactement le rang r de Φ.*

La méthode pratique pour avoir cette décomposition est la méthode de GAUSS :
effectuons la première étape :

1. soit le terme x_1 apparait de manière quadratique dans le polynôme

   $$P(x_1, x_2, ..., x_n) = ax_1^2 + 2x_1 B(x_2, ..., x_n) + C(x_2, ..., x_n),$$

   où B est un polynôme linéaire (homogène de degré 1) et C un polynôme quadratique.
   Alors $P(x_1, ..., x_n) = a\left(x_1 + \frac{1}{a}B\right)^2 + (C - \frac{1}{a}B^2)$. Le deuxième terme ne dépend plus que de $n-1$ variables.

2. si aucun des x_i n'apparait de manière quadratique, supposons que x_1 et x_2 apparaissent dans des doubles produits (termes rectangles)

$$P = ax_1x_2 + x_1B + x_2C + D,$$

où B et C sont des polynômes linéaires de $x_3, ..., x_n$, et D est un polynôme quadratique des mêmes indéterminéees.

$$P = \frac{1}{a}(ax_1 + C)(ax_2 + B) + (D - \frac{1}{a}BC).$$

Le produit de deux polynômes linéaires est un polynôme quadratique.

On se place maintenant dans une base conjuguée dont les r premiers vecteurs sont non-isotropes (donc les $n - r$ derniers le sont).

Proposition 2.12

$$x \in Ker\varphi \Longleftrightarrow x \in Vect\{e_{r+1}, e_{r+2}, ..., e_n\}$$

Par conséquent :

$$rg(\Phi) = dimE - dim(Ker\varphi).$$

Corollaire 2.13

(Φ est non dégénérée) si et seulement si ($rg(\Phi) = dim(E)$) si et seulement si ($discr(\Phi) \neq 0$).

2.2 Classification dans $\mathbb{C}$

On a besoin d'un certain nombre de lemmes :

Lemme 2.14

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n. La forme quadratique Φ sur E est le carré d'une forme linéaire non nulle si et seulement si le rang de Φ est 1.

Preuve du Lemme 2.14:

$\mathbb{C}$ intervient dans le fait qu'il est algébriquement clos, et que donc tout complexe admet deux racines.

■

Lemme 2.15

Soit E un espace vectoriel complexe de dimension n. La forme quadratique Φ sur E est le produit de deux formes linéaires indépendantes si et seulement si le rang de Φ est 2.

Théoreme 2.16

Toute matrice symétrique complexe de rang r est congruente à la matrice

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

Le cardinal du quotient de l'espace des matrices symétriques par la relation congruence est donc n+1.

2.3 Classification dans $\mathbb{R}$

Théoreme 2.17 (d'inertie de Sylvester)

Quelle que soit la base formée de vecteurs conjugués deux à deux à laquelle on rapporte l'espace vectoriel réel E de dimension n, la matrice diagonale qui représente la forme quadratique comporte le même nombre d'éléments strictement positifs et le même nombre d'éléments strictement négatifs.
Le couple $(p, r-p)$ est appelé la signature de Φ.

Cela nous amène tout droit à

Définition 2.12

Φ est dite positive si $\forall x \in E, \Phi(x) \geqslant 0$.
Elle est dite négative si $\forall x \in E, \Phi(x) \leqslant 0$.

Proposition 2.18

Elle est positive si $p = r$ et négative si $p = 0$.

Théoreme 2.19 (Cauchy-Schwartz)

Soit Φ une forme quadratique positive, de forme polaire φ. Alors $\forall (x,y) \in E^2$,

$$(\varphi(x,y))^2 \leqslant \Phi(x)\Phi(y).$$

On a bien dit positive, pas définie positive.

Remarque 6 *Il y a égalité si et seulement si x et y sont liés.*

Théoreme 2.20 (Minkowski)

Soit Φ une forme positive sur l'espace vectoriel réel E. Pour tout $(x,y) \in E^2$,

$$\sqrt{\Phi(x+y)} \leqslant \sqrt{\Phi(x)} + \sqrt{\Phi(y)}.$$

Remarque 7 *Il y a égalité si et seulement si x et y sont liés positivement : $\exists k > 0, y = kx$.*

Remarque 8 *Pour une forme positive ou négative, il y a égalité entre le noyau et le cône isotrope.*

Voilà enfin le théorème qui débouche sur les espaces euclidiens :

Théoreme 2.21 (et Définition)

Soit Φ une forme définie, sur l'espace vectoriel réel E. le signe du réel $\Phi(x)$ est fixe et ne dépend pas de x. Selon que ce signe est positif ou négatif on dira que la forme quadratique Φ est définie positive ou définie négative.

Et comme il suffit de multiplier par -1 pour transformer l'une en l'autre ...

Proposition 2.22

Φ est définie positive si et seulement si $p = n$, i.e sa signature est $(n, 0)$.