agreg interne: méthode numérique d'intégration et polynômes orthogonaux

7 décembre 2013

.

Notions abordées à réviser si besoin : méthodes des rectangles et des trapèzes, algèbre linéaire en dimension finie, espaces préhilbertiens, orthogonalisation de schmidt, théorème de Rolle, Toute fonction continue sur un compact est bornée, division euclidienne des polynômes.

Remarque préalable : pour un exposé plus général sur les polynôme orthogonaux et méthodes numérique, voir "analyse numérique" de DEMAILLY ; c'est un livre très accessible mais un peu spécialisé (à completer par d'autres pour l'analyse) .
Vous trouverez aussi toutes les notions abordées ici dans "mathématiques pour l'agregation interne analyse probabilités" de DANTZER ; c'est un livre très clair et accessible et qui aborde l'ensemble du programme d'analyse. Il peut donc servir de référence principale.
Dans toute cette planche on considère l'espace $E = \mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefs réels, ainsi qu'un intervalle $I = [a, b]$ non réduit à un point. De plus f désignera une fonction définie sur I à valerus réelles.
On travaillera également avec le produit scalaire $(P, Q) \mapsto \int_I P(t)Q(t)dt$ sur E.

EXERCICE 1 (propriétés de base des polynômes orthogonaux)

1) Vérifier que le produit scalaire définit plus haut en est bien un.

On définit la suite des polynômes orthogonaux comme la suite de polynômes unitaires obtenue par procédé d'orthogonalisation de schmidt à partir de la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, on note P_n le $n+1$-ème polynôme ainsi obtenu.

2)Vérifer que $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est de dégré n.

3)Montrer que pour tout $k \in \{1, .., n\}$ P_k est orthogonal à $R_{k-1}[X]$.

4)on fixe ici un entier n.
a)Montrer que si P_n admet une racine multiple, on peut trouver un polynome Q de degré$<$n tel que $P_n \times Q > 0$ sur I.

b)Montrer qu'il en est de même si P_n admet une racine dans $\mathbb{C} - I$.

c)En déduire que P_n est scindé à racines simples et que toutes ses racines sont dans I.

EXERCICE 2 (interpolations)

On pose $E = \mathbb{R}[X]$. Soient $a_0, .., a_n$ des éléments de I deux à deux distincts.

1)(interpolation de base) On considère l'application de E dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par

$$\varphi : P \mapsto \begin{pmatrix} P(a_0) \\ \vdots \\ P(a_n) \end{pmatrix}$$

a)Montrer que φ est un isomorphisme.

b)Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n prenant les mêmes valeurs que f aux points $a_0, .., a_n$.

c) Déterminer $L_0, ..L_n$ les antécédants par φ des lélments de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ et exprimer le polynôme P du b) en fonction des L_i et de $f(a_0), .., f(a_n)$.

d)On suppose f de classe C^{n+1} sur I. On fixe $x \in I - \{a_0, .., a_n\}$ et on cosidère $A \in \mathbb{R}$ tel que $f(t) - P(t) - A(t - a_0)(t - a_1) \times .. \times (t - a_n)$ s'annule quand $t = x$.

En appliquant le théorème de rolle plusieurs fois montrer qu'il existe un réel M (indépendant de x) tel que $|f(x) - P(x)| \leq \dfrac{M}{n+1} |(x - a_0)(x - a_1) \times .. \times (x - a_n)|$.

2)(interpolation avec dérivées)
a) On suppose f de classe C^n sur I. Est il possible de trouver un polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que $f(a_0) = P(a_0), f'(a_0) = P'(a_0), ..., f^{(n)}(a_0) = P^{(n)}(a_0)$? Est il unique ?

b) On se place ici dans le cas où $a_0 = 0$. Pouvez vous préciser les sens de l'affirmation "P est le polynôme de degré inférieur ou égal à n qui approche le mieux f au voisinage de 0" et la justifier ?

3) En considérant un autre isomorphisme que φ, montrer que si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I, il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à $2n + 1$ tel que $\forall i \in \{0, ..n\}, P(a_i) = f(a_i)$ et $P'(a_i) = f'(a_i)$.

4) a) Dans le cas où f est dérivable sur I, peut on forcément trouver un polynôme P de degré inférieur ou égal à 1 vérifiant $P(a_0) = f(a_0)$ et $P'(a_1) = f'(a_1)$?

b) Selon vous , comment peut on généraliser les trois types d'interpolation précédents ?

EXERCICE 3 (erreurs pour les méthodes numériques d'integration)
1)a) Avec les notations et hypothèses du 1)c) de l'exercice 2 , majorer l'erreur faite en approchant l'intégrale de f sur I par celle de P sur I. (on cherchera un majoration faisant intervenir une puissance de la longueur de I)

b) Montrer qu'il existe des réels $l_0, .., l_n$ indépendants de f tels que la valeur approchée de l'intégrale de f obtenue au a) est $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} l_i \times f(a_i)$.

c)(méthode des trapèzes) Avec les notations et hypothèses du 1)c) de l'exercice 2, en supposant de plus $n = 1$, $a_0 = a$ et $a_1 = b$, donner une majoration plus fine de l'erreur faite en approchant l'intégrale de f sur I par celle de P sur I.

2)(méthode composée) Pour cette question seulement, on considère n, p deux entiers naturels ainsi qu'une subdivision régulière de I à $n+1$ points de subdivision. On note $I_1, .., I_n$ les n segments reliant un point de la subdivision au suivant.
Sur chaque intervalle du type I_j on approche f par un polynôme P_j de degré au plus p obtenu par interpolation en $p + 1$ points. On approche alors l'intégrale de f sur I par la somme des intégrales des P_j sur I_j.

Majorer l'erreur ainsi faite.

EXERCICE 4 (ordre des méthodes simples)
On dit d'une méthode d'intégration qu'elle est d'ordre n si elle donne la valeur exacte de l'intégrale sur I de toute fonction f polynômiale de degré inférieur ou égal à n et si pour au moins un polynôme de dégré $n+1$ elle ne donne pas la valeur exacte de sont intégrale sur I.

1) a)montrer que la méthode des rectangles (consistant à remplacer f par sa valeur en a) est d'ordre 0 alors que la méthode du point milieu (consistant à remplacer f par $f(\dfrac{a+b}{2})$) est d'ordre 1.

b) L'ordre de la méthode coïncide t'il avec le degré du polynôme utilisé pour approcher f ?

2) On note ici P_{n+1} le polynôme orthogonal de degré $n + 1$ et on suppose que $a_0, .., a_n$ sont les racines de P_{n+1} de sorte que $P_{n+1} = (X - a_0) \times .. \times (X - a_n)$. On note $l_0, .., l_n$ les réels du 1)b) de l'exercice 3 de sorte que la valeur approchée de l'intégrale de toute fonction f sur I est $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} l_i \times f(a_i)$.

a)Montrer que si f est polynomiale, sont intégrale approchée coïncide avec celle du reste de la division euclidienne de F par P_{n+1}.

b)En déduire qu'avec ce choix particulier de $a_0, .., a_n$ la méthode d'intégration est d'ordre au moins égal à $2n + 1$.

c) Montrer que la méthode est exactement d'ordre $2n + 1$.