Notations et objectifs du problème.

On désigne par $\mathscr{E}$ l'espace vectoriel des suites $(x_k)_{k\geqslant 0}$ de nombres complexes, par $\mathbf{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ formé des suites bornées et par $\mathbf{E}_c$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$ constitué des suites convergentes (il n'est pas demandé d'établir ces inclusions).

Si $x = (x_k)_{k\geqslant 0}$ est un élément de $\mathbf{E}$ on pose $\|x\|=\sup\{|x_k|,\ k\geqslant 0\}$; on admet que $\|\ \|$ est une norme sur $\mathbf{E}$ et que $\mathbf{E}$ est complet pour cette norme.

On note $\mathscr{T}$ l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui à $x = (x_k)_{k\geqslant 0}$ associe $y = (y_k)_{k\geqslant 0}$ définie par $y_k = \dfrac{\sum_{j=0}^{k} x_j}{k+1}\cdot$ Cette application est linéaire (il n'est pas demandé de le démontrer).

Questions préliminaires

1. Montrer que $\mathbf{E}$ est stable par $\mathscr{T}$. On note T la restriction de $\mathscr{T}$ à $\mathbf{E}$.
2. Vérifier que T est une application linéaire continue.
3. Montrer que $\mathbf{E}_c$ est stable par T et plus précisément que si x converge vers l, il en est de même pour $y = Tx$.

Objectifs

Le but du problème est d'étudier quelques propriétés de T. Il est constitué de trois parties indépendantes.

La partie I permet d'examiner quelques exemples montrant une variété importante de comportements possibles.

Dans la partie II on détermine le noyau, l'image et le spectre de T.

La partie III est consacrée à l'aspect régularisant de T. On y établit que :

1. Si x est une suite bornée, $(T^n x)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers une suite constante.
2. L'ensemble des suites x de $\mathbf{E}$ telles que, pour tout n, $T^n x$ soit une suite divergente, est dense dans $\mathbf{E}$.
3. Si Ω est l'ensemble des suites à termes dans $[0,1]$, on définit la probabilité de KOLMOGOROFF P sur Ω et on démontre que :
   (a) $P(x\in\Omega \text{ et } x \text{ converge}) = 0$.
   (b) $P(x\in\Omega \text{ et } T(x) \text{ converge}) = 1$.

Partie I : Exemples

A. Premiers exemples

1. Soit θ dans $]0,2\pi[$; dans cette question on note x la suite $(x_k)_{k\geqslant 0}$ définie par $x_k = \exp(ik\theta)$. On pose $y = Tx$. Démontrer que y appartient à $\mathbf{E}_c$.
2. Soit n un entier $\geqslant 1$; dans cette question on note x la suite définie par $x_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est multiple de } n \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$

   On pose $y = Tx$.
   (a) Calculer y_{pn+j} pour $p\geqslant 0$ et $0\leqslant j < n$;
   (b) En déduire que y appartient à $\mathbf{E}_c$.
3. Quel est le lien entre les exemples précédents et la troisième question préliminaire ?

4. Soit t dans $[0,1]$. On définit $x(t)$ par :

$$\begin{cases} x_0(t) = t \\ x_{k+1}(t) = (x_k(t)-1)^2 \text{ pour } k \geqslant 0. \end{cases}$$

   Il eſt facile de voir que, pour tout t dans $[0,1]$, la suite $x(t)$ eſt à valeurs dans $[0,1]$.
   On pose alors $y(t) = Tx(t)$.
   Soit t_0 le nombre $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot$ (Il vaut $0,38$ à 10^{-2} près).

   (a) On se propose de démontrer que, lorsque $t \neq t_0$, la suite $x(t)$ eſt divergente.
      i. On suppose la suite $x(t)$ convergente. Trouver la limite ℓ de $x(t)$.
      ii. Vérifier que, si $t \neq t_0$, alors, pour tout entier k, $x_k(t) \neq \ell$.
      Si, dans ces conditions, la suite $x(t)$ était convergente, quelle serait la limite (quand k tend vers l'infini) du rapport $\dfrac{x_{k+1}(t)-\ell}{x_k(t)-\ell}$?
      iii. Conclure.

   (b) On définit f et g fonctions de $[0,1]$ dans lui-même par :
      $f(x) = (x-1)^2$ et $g = f \circ f$.
      i. Dessiner le graphe de la fonction g en précisant les variations, la position du graphe par rapport à la première bissectrice et ses points d'intersection avec cette droite.
      ii. *Pour cette queſtion , on peut se contenter d'une argumentation basée sur le graphe.*
      Montrer que les suites extraites $(x_{2k}(t))_{k\geqslant 0}$ et $(x_{2k+1}(t))_{k\geqslant 0}$ sont convergentes.
      En déduire que $y(t)$ eſt convergente et identifier sa limite en fonction de t.
      iii. On rappelle que $y(t) = (y_k(t))_{k\geqslant 0}$. La suite de fonctions (y_k) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

B. Une remarque

Soit x dans $\mathbf{E}$ et $y = Tx$.

1. Montrer que, pour tout $k \geqslant 1$, $|y_k - y_{k-1}| \leqslant \dfrac{2\|x\|}{k+1}$.
2. En déduire que si x eſt une suite à valeurs réelles alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de y eſt un intervalle.

C. Suites à valeurs dans $\{0,1\}$

Pour tout entier $p \geqslant 1$, on pose $u_p = 1! + 2! + 3! + \cdots + p!$ et $v_p = 1! + 3! + 5! + \cdots + (2p-1)!$
De plus $u_0 = 0$ et $v_0 = 0$.

1. Montrer que $u_p \underset{p\to\infty}{\sim} p!$ (on pourra mettre $p!$ en facteur). Montrer de même que $v_p \underset{p\to\infty}{\sim} (2p-1)!$
   On définit une suite x de la manière suivante :
   si $k \in \mathbf{N}$, il exiſte un unique $j(k) \geqslant 0$ tel que $u_{j(k)} \leqslant k < u_{j(k)+1}$ et dans ce cas, si $j(k)$ eſt pair on pose $x_k = 1$, si $j(k)$ eſt impair on pose $x_k = 0$.
   Autrement dit
$$x = 1,0,0,1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,\text{(24 fois)},1,1,1,\text{(120 fois)}\ldots$$
2. On pose $y = Tx$. Calculer y_k lorsque $k = u_p$.

Tournez la page S.V.P.

3. En déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérence de y est égal à $[0, 1]$.
   Quel est celui de la suite x ?
4. Soient $(\Omega, \mathscr{B}, P)$ un espace probabilisé, $(X_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli, indépendantes et de paramètre 1/2. ($\forall k \geqslant 0,\ P(X_k = 0) = P(X_k = 1) = 1/2$).

   (a) Calculer, pour $k \geqslant 0$ et $p \geqslant 0$, $P(X_k = X_{k+1} = X_{k+2} = ... = X_{k+p} = 0)$, puis $P(\forall j \geqslant k, X_j = 0)$.

   (b) En déduire que la suite $(X_k)_{k\geqslant 0}$ diverge presque sûrement.

   (c) On appelle Y la suite TX où X est la suite (X_k).
   Montrer, en utilisant un théorème de cours, que la suite $(Y_k)_{k\geqslant 0}$ converge presque sûrement.

Partie II. Étude de l'endomorphisme T

A. Généralités

1. Montrer que l'application linéaire $\mathscr{T}$ est une bijection de $\mathscr{E}$ sur lui-même.
2. On désigne par $\mathscr{A}$ l'ensemble $\left\{\dfrac{1}{k+1},\ k \in \mathbf{N}\right\}$. Soit λ un nombre complexe. On note $I_{\mathscr{E}}$ l'application identique de $\mathscr{E}$ dans lui-même.

   (a) Montrer que si λ n'appartient pas à l'ensemble $\mathscr{A}$, alors l'application linéaire $\mathscr{T} - \lambda I_{\mathscr{E}}$ est bijective.

   (b) Montrer que si λ appartient à l'ensemble $\mathscr{A}$, alors l'application linéaire $\mathscr{T} - \lambda I_{\mathscr{E}}$ n'est ni injective ni surjective.
3. Soit $y = (y_k)_{k\geqslant 0}$ dans $\mathbf{E}$. Montrer que :

$$y \in \mathrm{Im}(T) \iff \exists K > 0 \text{ tel que, } \forall k \geqslant 1,\ \ |(k+1)y_k - ky_{k-1}| \leqslant K.$$

4. L'application linéaire T de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{E}$ est-elle surjective ? Est-elle injective ?

B. Quelques suites auxiliaires

Dans ce **B.** , on considère un nombre complexe λ vérifiant les hypothèses suivantes :

$$(L) \qquad \lambda \neq 0, \quad \lambda \notin \mathscr{A}, \quad \mathrm{Re}\,\frac{1}{\lambda} \neq 1.$$

On écrit $1 - \dfrac{1}{\lambda} = a + ib$ avec a et b réels ($a \neq 0$). On définit la suite α par :

$$(*) \qquad \alpha_0 = \frac{1}{1-\lambda} \text{ et, pour } k \geqslant 1,\ \alpha_k = \frac{1}{(1 + (1 - \frac{1}{\lambda})\frac{1}{k})}\alpha_{k-1}.$$

Cette suite est bien définie grâce aux hypothèses (L).

1. Vérifier que $\alpha_k \neq 0$ pour tout entier positif k.
2. Montrer que $\ln|\alpha_k| - \ln|\alpha_{k-1}| \ = -\dfrac{a}{k} + \underset{k\to\infty}{O}\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$.
3. Que dire de la suite $|\alpha|$ si a est négatif ?

4. On rappelle qu'il existe un nombre réel γ tel que l'on ait : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \underset{n\to\infty}{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

   Pour a positif, montrer qu'il existe une nombre réel A_1 strictement positif tel que : $|\alpha_k| \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{A_1}{k^a}$.

   (A_1 et les nombres réels $A_2, \ldots, A_5$ qui suivent dépendent de λ mais sont indépendants de k).

5. On définit $U_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j|\alpha_{j-1}|}$ et $V_k = \sum_{j=1}^{k-1} \left|\frac{1}{\alpha_j} - \frac{1}{\alpha_{j-1}}\right|$.

   (a) Montrer qu'il existe une constante A_2 strictement positive telle que :

   $$\forall k \geqslant 1, \quad 0 \leqslant U_k \leqslant A_2\, k^a.$$

   (b) En déduire qu'il existe une constante A_3 telle que $\forall k \geqslant 1\ |\alpha_k\, U_k| \leqslant A_3$.

6. En exprimant $\frac{1}{\alpha_j} - \frac{1}{\alpha_{j-1}}$ grâce à (*) montrer qu'il existe une constante A_4 strictement positive telle que :

   $$\forall k \geqslant 1, \quad |\alpha_k| V_k \leqslant A_4.$$

C. Détermination du spectre de T.

Définition.

Soit S un endomorphisme continu de $\mathbf{E}$, on dit que S est inversible si S réalise une bijection de $\mathbf{E}$ sur lui-même.

Remarque : $\mathbf{E}$ étant complet, il résulte d'un théorème de BANACH que si S est bijectif et continu, alors S^{-1} est continu, de sorte que S est alors un élément inversible de l'algèbre des endomorphismes continus de E.

On appelle spectre de S, et on note $\sigma(S)$, l'ensemble des nombres complexes λ tels que $S - \lambda I_{\mathbf{E}}$ n'est pas inversible.

On **admettra** que $\sigma(S)$ est un fermé de $\mathbf{C}$.

1. Est-ce que 0 est dans $\sigma(T)$? Même question pour 1.

   Dorénavant, on se donne un complexe λ **vérifiant les hypothèses** (L) **du II.B.** On garde les notations $\alpha, U, V, \ldots$ du **II.B.**

2. Soient x et y deux éléments de $\mathscr{E}$. Vérifier que :

   $$(**) \qquad (T - \lambda I_{\mathbf{E}})(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 & = \dfrac{1}{1-\lambda} y_0 \\ \forall k \geqslant 1,\ x_k & = \dfrac{1}{1 + (1-\frac{1}{\lambda})\frac{1}{k}} \left(x_{k-1} + \dfrac{1}{\lambda}(y_{k-1} - y_k - \dfrac{1}{k} y_k) \right) \end{cases}$$

3. On considère $y = \left(\frac{1}{k+1}\right)_{k\geqslant 0}$.

   On considère la suite x (*a priori* élément de $\mathscr{E}$) telle que $(T - \lambda I_{\mathbf{E}})(x) = y$.

   (a) Quel est le lien entre x et la suite α du **II.B.** ?

   (b) En utilisant **II.B.** montrer que, si $\mathrm{Re}(1 - \frac{1}{\lambda}) < 0$, alors $\lambda \in \sigma(T)$.

4. On suppose $\mathrm{Re}(1 - \frac{1}{\lambda}) > 0$.

   Soit y dans $\mathbf{E}$ et soit x la suite définie par les formules $(**)$ ci-dessus.

Tournez la page S.V.P.

(a) Établir les relations suivantes :

$$\forall k \geqslant 1, \quad \frac{x_k}{\alpha_k} = \frac{x_{k-1}}{\alpha_{k-1}} + \frac{1}{\lambda}\frac{y_{k-1}-y_k}{\alpha_{k-1}} - \frac{1}{\lambda}\frac{y_k}{k\alpha_{k-1}}.$$

$$\forall k \geqslant 1, \quad x_k = \alpha_k y_0 + \frac{\alpha_k}{\lambda}\sum_{j=1}^{k}(y_{j-1}-y_j)\frac{1}{\alpha_{j-1}} - \frac{1}{\lambda}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{y_j}{j\alpha_{j-1}}\right)\alpha_k.$$

(b) En remarquant que $\displaystyle\sum_{j=1}^{k}(y_{j-1}-y_j)\frac{1}{\alpha_{j-1}} = \sum_{j=1}^{k} y_j\left(\frac{1}{\alpha_j}-\frac{1}{\alpha_{j-1}}\right) + \frac{y_0}{\alpha_0} - \frac{y_k}{\alpha_k}$, montrer qu'il existe une constante A_5 (indépendante de y et de k) telle que

$$\forall k \geqslant 0,\ |x_k| \leqslant A_5||y||.$$

5. Déterminer $\sigma(T)$ et le représenter sur un dessin.

Partie III. Propriétés régularisantes de T

Notations et terminologie

1. On sera amené à considérer des suites de suites (ou plus généralement des familles de suites). Si I est un ensemble d'indices le symbole $\left((x_k^{(i)})_{k\geqslant 0}\right)_{i\in I}$ désigne la famille des suites $x^{(i)}$ indexées par I, $x_k^{(i)}$ est le terme d'indice k de la suite $x^{(i)}$.
   Par exemple considérer $\left(\left(\dfrac{1}{(k+1)^n}\right)_{k\geqslant 0}\right)_{n\geqslant 0}$, c'est considérer les suites :
   $x^{(0)} = (1,1,1,1,1,1.......)$
   $x^{(1)} = (1,1/2,1/3,1/4,1/5.......)$
   $x^{(2)} = (1,1/4,1/9,1/16,1/25........)$
   $x^{(3)} = (1,1/8,1/27,1/64,1/125......)$ etc.
   Dans l'énoncé, k désignera presque toujours l'indice des suites de complexes et n sera réservé à l'indexation des suites de suites.
2. Limites :
   A priori, le mot suite, sans indication contraire, désigne un élement de $\mathscr{E}$; aussi, lorsque l'on dit que la suite $(x_k^{(n)})_{k\geqslant 0}$ converge on veut dire que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k^{(n)}$ existe dans $\mathbf{C}$.
   Si on veut exprimer l'idée qu'il existe dans $\mathbf{E}$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to\infty}\|x^{(n)}-x\| = 0$, on dira que la suite $(x^{(n)})$ d'élements de $\mathbf{E}$ converge dans $\mathbf{E}$ vers x.
   Les expressions utilisées seront suffisamment détaillées pour éviter toute ambiguïté.

A. Convergence simple

Définition. Soient $(x^{(n)})_{n\geqslant 0} = ((x_k^{(n)})_{k\geqslant 0})_{n\geqslant 0}$ une suite d'élements de $\mathbf{E}$ et u dans $\mathbf{E}$. On dit que $(x^{(n)})_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers $u = (u_k)_{k\geqslant 0}$ si pour tout $k \geqslant 0$, $(x_k^{(n)})_{n\geqslant 0}$ tend vers u_k quand n tend vers l'infini.

1. Exceptionnellement, dans cette question et la suivante, les suites de nombres complexes sont indexées par n pour des raisons qui apparaitront ultérieurement.
   Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes tendant vers ℓ dans $\mathbf{C}$.
   Soit α un nombre complexe tel que $|\alpha| < 1$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n}\alpha^j\, a_{n-j}$.
   Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\dfrac{\ell}{1-\alpha}$.

2. Soient v et w deux suites de nombres complexes telles que :
$$\begin{cases} \text{Pour tout entier } n \geqslant 0, \quad v_{n+1} = \alpha v_n + w_n, \\ (w_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge vers } \ell. \end{cases}$$
Montrer que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\dfrac{\ell}{1-\alpha}$.

3. Soit x une suite de nombres complexes. On pose $a = x_0$ et $b = x_1$. On considère la suite $(x^{(n)})_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $\mathbf{E}$ définie par $x^{(n)} = T^n x$, en convenant que $x^{(0)} = x$.
   (a) Calculer $x_0^{(n)}$. Quelle est la limite de la suite $x_0^{(n)}$?
   (b) Calculer $x_1^{(n)}$. Quelle est la limite de la suite $x_1^{(n)}$?
   (c) Montrer que :
   $$\forall k, n \geqslant 0,\ x_{k+1}^{(n+1)} = \frac{1}{k+2}\, x_{k+1}^{(n)} + \frac{1}{k+2}\sum_{j=0}^{k} x_j^{(n)}.$$
   (d) Montrer que $x^{(n)}$ converge simplement vers la suite constante égale à a.
4. Montrer que, si $(x^{(n)})_{n\geqslant 0}$ converge dans $\mathbf{E}$, alors sa limite est la suite constante égale à a.
5. On suppose que $a = 0$ et que la suite (x_k) a une limite $c \neq 0$ dans $\mathbf{C}$.
   Montrer que $(x^{(n)})_{n\geqslant 0}$ diverge dans $\mathbf{E}$.

B. Lissage : un résultat négatif

Pour n entier fixé, on note $\mathbf{E}_n = \{x \in \mathbf{E} \text{ telles que } T^n x \text{ converge dans } \mathbf{C}\}$. $\mathbf{E}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$ (on ne demande pas de démontrer ce résultat).

On admet le théorème suivant :

Soit $\mathbf{F}$ un espace de Banach. Si pour tout $n \geqslant 0$, $\mathbf{F}_n$ est un sous ensemble de $\mathbf{F}$ fermé et d'intérieur vide, alors la réunion de tous les $\mathbf{F}_n$ est aussi d'intérieur vide.

1. Soit $\mathbf{F}$ un espace vectoriel normé et G un sous espace vectoriel de $\mathbf{F}$ d'interieur non vide.
   Ainsi G contient une boule ouverte de $\mathbf{F}$, de centre x_0 et de rayon ε strictement positif.
   En utilisant la structure d'espace vectoriel, montrer successivement que :
   (a) G contient la boule ouverte de centre 0 et de rayon ε,
   (b) $\mathbf{F} = G$.
2. On admet provisoirement, dans cette question, que $\mathbf{E}_n \neq \mathbf{E}$ pour tout entier $n \geqslant 0$.
   (a) Montrer que $\mathbf{E}_c$ est un sous espace fermé de $\mathbf{E}$.
   (b) Montrer que l'ensemble des x de $\mathbf{E}$ tels que, pour tout $n \geqslant 0$, la suite $T^n x$ ne soit pas convergente dans $\mathbf{C}$ est dense dans $\mathbf{E}$.
3. On prouve dans cette question ce qui est admis à la question précédente.
   (a) Soient t_0 un nombre réel positif et f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbf{C}$.
   Pour $n \geqslant 0$, on note (H_n) l'hypothèse :
   $$(H_n) \qquad \exists t_1 \geqslant t_0, \quad \forall j \leqslant n, \quad \exists M_j, \quad \forall t > t_1, \quad |f^{(j)}(t)| \leqslant \frac{M_j}{t^j} \quad \text{avec } f^{(0)} = f$$
   .
   Pour $t \geqslant t_0 + 1$, on pose $g(t) = (t+1)f(t) - t f(t-1)$. La fonction g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[t_0 + 1, \infty[$.
   On suppose (H_n) vérifiée pour la fonction f et un entier $n \geqslant 1$.
   En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que g vérifie (H_{n-1}).

Tournez la page S.V.P.

(b) Soit n un entier $\geqslant 1$ et soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $[0, \infty[$, satisfaisant l'hypothèse (H_n) avec $t_0 = 0$. Pour tout entier $k \geqslant O$, on pose $y_k = f(k)$. Montrer par récurrence sur n qu'il existe x dans $\mathbf{E}$ telle que $y = T^n x$.

(c) On pose $y = (\exp(i \ln(k+1)))_{k \geqslant 0}$.

i. Montrer que y est dans $\operatorname{Im}(T^n)$ pour tout $n \geqslant 0$.

ii. En déduire que, pour tout $n \geqslant 0$, $\mathbf{E}_n$ est différent de $\mathbf{E}$.

C. Aspect probabiliste

On appelle Ω l'ensemble des suites de nombres réels appartenant à $[0,1]$.

Étant donnés un entier naturel n et deux suites finies de nombres réels $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ et $b = (b_0, b_1, \dots, b_n)$ vérifiant pour tout j les inégalités $0 \leqslant a_j \leqslant b_j \leqslant 1$, on désigne par $K_{a,b}$ le *pavé* $K_{a,b} = \left\{x \in \mathbf{R}^{n+1},\ \forall j,\ \ a_j \leqslant x_j \leqslant b_j\right\}$.

Le volume de $K_{a,b}$ est par définition le réel $v(K_{a,b}) = \prod_{j=0}^{n} (b_j - a_j)$.

On associe à K la partie Ω_K de Ω définie par

$$\Omega_K = \{x = (x_k)_{k \geqslant 0}, \quad (x_0, x_1, \dots, x_n) \in K\}.$$

On admettra qu'il existe sur Ω une tribu contenant tous les Ω_K et sur cette tribu $\mathscr{B}$ une probabilité P telle que $P(\Omega_K) = v(K)$ pour tout pavé K.

On définit enfin, pour k entier naturel, la variable aléatoire réelle X_k, application de Ω dans $\mathbf{R}$, qui à $x = (x_i)_{i \geqslant 0}$ associe $X_k(x) = x_k$.

1. Montrer que $(X_k)_{k \geqslant 0}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi et identifier cette loi.
2. Soit ε un nombre réel tel que $0 < \varepsilon < 1$.
   Calculer, pour $n \geqslant 0$ et $p \geqslant 1$, $P\left(\{\omega \in \Omega |\ |X_j(\omega) - X_n(\omega)| < \varepsilon \text{ pour } j = n+1, n+2, \dots, n+p\}\right)$.
3. En déduire que x diverge presque sûrement (on pourra admettre que l'ensemble $\{x \in \Omega \mid x \text{ converge }\}$ est dans la tribu $\mathscr{B}$).
4. En utilisant un théorème du programme, montrer que Tx converge presque sûrement.
