Séance du 8 novembre 2013 :
Equations différentielles - fonctions de plusieurs variables : EDP

1 Le programme sur ce sujet :

Sur les équations différentielles

12.2 quations différentielles
12.2.1 quations différentielles linéaires

Systèmes linéaires $X' = A(t)X + B(t)$, où A (resp. B) est une application continue d'un intervalle I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{C}^n$).

Théorème (admis) d'existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy.

Dimension de l'espace des solutions de l'équation homogène. Méthode de la variation des constantes. Systèmes à coefficients constants : exponentielle d'un endomorphisme, application au problème de Cauchy ; résolution du système $X' = AX$ par diagonalisation ou triangularisation de A, ou au moyen de l'exponentielle de tA, t réel.

quations linéaires scalaires $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$ où a, b, c sont continues sur un intervalle I et à valeurs complexes. Système du premier ordre associé, étude du problème de Cauchy ; solution de l'équation sans second membre, méthode de variation des constantes. Résolution lorsqu'une solution de l'équation sans second membre ne s'annulant pas sur I est connue.

12.2.2 Notions sur les équations différentielles non linéaires

Solutions d'une équation $x' = f(t, x)$, ou $x'' = f(t, x, x')$, où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Théorème (admis) de Cauchy-Lipschitz dans le cas $\mathcal{C}^1$: existence et unicité d'une solution maximale au problème de Cauchy.

Exemples d'études qualitatives.

Résolution d'équations à variables séparables ou homogènes ; exemples d'emploi de changements de variable ou de fonction en liaison avec des propriétés d'invariance.

Applications en physique (trajectoires dans un champ de vecteurs) et en géométrie différentielle.

Sur les EDPs

Les EDPs ne sont pas mentionnées ouvertement dans le programme, elles constituent cependant une application combinée du programme de calcul différentiel : dérivées partielles et équations différentielles.

Nous verrons quelques exercices à ce titre.

2 Rappels de cours

2.0.1 Sur les équations différentielles

Je vous renvoie au polycopié fourni, qui traite de façon quasi exhaustives les points au programme.

2.0.2 Sur les EDPs

Dans de nombreuses situations il s'agit de se ramener à des équations différentielles via un changement de variables, en considérant que si une dérivée partielles par rapport à une variable est nulle, la fonction "ne dépend en fait que des autres variables"

3 Exercices

1) Commencer par traiter les exemples associés à chaque type d'équation du polycopié.
2) Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \text{ via } \begin{cases} u = 2x + y \\ v = 3x + y \end{cases}$$

3) En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = xy \\ v = x/y \end{cases}$$

déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

4) (Equation de la chaleur)

$$E : \frac{\partial f}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

Chercher les solutions de E qui ont une expression de la forme $f(t,x) = a(t)b(x)$

5) (Equation de la corde vibrante)

$$E : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Montrer que les solutions ont une expression de la forme $f(t,x) = a(x+ct) + b(x-ct)$

6) (Fonctions homogènes)
On note U l'ensemble des (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $x > 0$ et $E = \mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{R})$.
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$;
on dit que f est homogène de degré α si $f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$ pour tous $t \in \mathbb{R}^{+\star}$, $(x,y) \in U$. On pose :

$$\forall f \in E, \forall (x,y) \in U, \Phi(f)(x,y) = x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

a) Déterminer $\ker \Phi$.

b) Soit $f \in E$. Montrer que f est homogène de degré α si, et seulement si, $\Phi(f) = \alpha f$.

c) Résoudre l'équation d'inconnue $f \in E$,
$\Phi(f) = h$, h étant la fonction qui à (x,y) associe $(x^2+y^2)^{3/2}xy$.