Equations différentielles

I Complements sur l'exponentielle

a) Rappels sur l'exponentielle complexe

Rappels : la fonction exponentielle réelle, les fonctions trigonométriques cosinus et sinus sont supposées connues. Les formules sous-jacentes aussi.

Définition n°1

La fonction exponentielle complexe se définit par :

$$exp_{\mathbb{C}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x+iy & \longmapsto & exp_{\mathbb{C}}(z) = e^x e^{iy} = e^x(cos(y) + isin(y)) \end{array}$$

On continue habituellement de noter e^z.

Cette fonction satisfait aussi la propriété de morphisme : $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$, et ses conséquences.

Propriété n°1

Soit I un intervalle de de $\mathbb{R}$ et $\alpha : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
Alors $f : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & e^{\alpha(t)} \end{array}$ est dérivable et : $\forall t \in I, f'(t) = \alpha'(t)e^{\alpha(t)}$

C'est à dire que ça se passe comme pour une fonction réelle.

Remarque : Il vient donc que la dérivée de $t \mapsto e^{at}$ est $t \mapsto ae^{at}$.

b) Théorème de caractérisation des exponentielles

Propriété n°2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction et $a \in \mathbb{C}$. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1) $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = e^{at}$
2) i) f est dérivable,
   ii) $f'(0) = a$
   iii) $\forall (t,u) \in \mathbb{R}^2, f(t+u) = f(t)f(u)$
3) i) f est dérivable
   ii) $f(0) = 1$
   iii) $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = af(t)$

II Généralités sur les équations différentielles

a) notion d'équation différentielle, solution

Une équation différentielle est une équation de la forme :

$$E : f(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

où f est une fonction donnée de $n+1$ variables complexes, y une fonction inconnue d'une variable réelle x.

Une solution de E est alors un couple (I, y) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et y une fonction n-fois dérivable sur I telle que : $\forall t \in I, f(t, y(t), y'(t), \cdots, y^{(n)}(t)) = 0$.

Pour I intervalle de $\mathbb{R}$ donné, l'ensemble des sollutions sur I de E est $\mathscr{S}_I(E) = \left\{ y \in \mathbb{K}^{\mathbb{R}} / (I, y) \text{ est un solution de } E \right\}$

Résoudre une équation différentielle, c'est déterminer tous les couples qui sont solution.

Résoudre une équation différentielle E sur un intervalle I c'est obtenir une description par extension de l'ensemble $\mathscr{S}_I(E)$.

Il s'agit d'un problème très vaste et très ouvert. Les types d'équations pour lesquelles on dispose de méthode et/ou de formules explicites sont très rares (et presque tous dans ce poly.). En dehors des cas particuliers que nous rencontrerons, l'approche est généralement qualitative : existence, unicité de solutions (cf théorème e Cauchy-Lipschitz), ou numérique.

b) changement de variable et de fonction

Une méthode qui se rencontre souvent pour étudier une équation différentielle est de faire un changement de variable et de fonction pour se ramener à une équation différentielle "plus simple".

On considère l'équation : $E : f(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$, que l'on étudie sur l'intervalle I.

On pose $x = \varphi(u)$ (changement de variable) où $\varphi : I \to J$ est une fonction $\mathcal{C}^1$. On pose $z(u) = y(\varphi(u))$ (changement de fonction) qui sera la nouvelle fonction inconnue.

On calcule les dérivées de z en fonction de celles de y et de φ. (Il n'est généralement pas utile de "retourner" les expressions obtenues pour exprimer les y en fonction des z.).

Un raisonnement (généralement simple dans les cas rencontrés en TSI), permet d'obtenir que (I, y) est solution de E si et seulement si (J, z) est solution d'une autre équation E' généralement plus simple (la plupart du temps linéaire).

Dans la majorité des cas le changement de variable/fonction à faire est indiqué dans l'énoncé.

c) équation différentielle linéaire

Remarque : En première année, ce qui suit a été traité avec $n = 1$ ou 2.

Une équation différentielle est dite linéaire si elle est de la forme :

$$E : a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

où les a_i et b sont des fonctions continues.

- Si les a_i sont constantes, on parle d' équation différentielle linéaire à coefficients constants.
- b s'appelle le second membre de l' équation différentielle
- Si b est la fonction nulle, on parle d' équation différentielle linéaire homogène.
- n est l'ordre de l' équation différentielle linéaire.
- Si $E : a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$ est une équation différentielle linéaire, alors $E_0 : a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ est son équation homogène associée.
- Une équation différentielle linéaire s'étudie sur un intervalle I sur lequel le coefficient a_n ne s'annule pas.

Propriété n°3

L'ensemble des solutions sur l'intervalle I d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n est un sous-espace vectoriel de dimension n de l'espace $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$.

Propriété n°4

L'ensemble des solutions sur l'intervalle I d'une équation différentielle linéaire d'ordre n est un sous-espace affine de dimension n de l'espace $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$. Plus précisément :

$$\mathscr{S}_I(E) = \{y_0\} + \mathscr{S}_I(E_0)$$

Plus généralement nous avons le principe de superposition :

Propriété n°5

Soit l' équation différentielle :

$$E : a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

avec $b = b_1 + b_2$. On pose :

$$E_1 : a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b_1(x)$$

et

$$E_2 : a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b_2(x)$$

Alors :

$$\mathscr{S}_I(E) = \mathscr{S}_I(E_1) + \mathscr{S}_I(E_2)$$

III équation différentielle linéaire d'ordre 1

Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 est de la forme :

$$E : a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

Sur un intervalle I sur lequel a_1 ne s'annule pas (intervalle d'étude), on se ramène, en divisant tout par a_1, à l' équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$E' : y' + a(x)y = f(x)$$

E' a les mêmes solutions sur I que E, nous la noterons encore E.

a) équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène à coefficients constants

Il s'agit du cas où a est constante et f nulle (i.e. $E_0 = E$). Le théorème de caractérisation des exponentielles permet facilement de montrer que :

$$\mathscr{S}_I(E) = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-at} \end{array}, \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$

b) équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants

Dans ce cas a est toujours constante, mais f n'est plus nulle. Le travail se décompose en deux étapes : on résout l'équation homogène comme au paragraphe précédent, puis on cherche une solution particulière de l' équation complète : y_0. Alors :

$$\mathscr{S}_I(E) = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-at} + y_0(t) \end{array}, \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$

Pour trouver y_0 on dispose de plusieurs méthodes, à tester dans l'ordre donné ci-dessous :

1) ⚠ penser à chercher une "solution évidente"
2) Selon la forme du second membre :
   - si f est de la forme $t \mapsto P(t)e^{mt}$ avec P polynômiale,
     alors on cherche y_0 sous la forme $t \mapsto Q(t)e^{mt}$avec $d°Q = d°P$ si $m \neq -a$ et $d°Q = d°P + 1$ si $m = a$.
   - si f est de la forme $t \mapsto P(t)cos(\omega t + \varphi)$ avec P polynômiale,
     alors on cherche y_0 sous la forme $t \mapsto A(t)cos(\omega t) + B(t)sin(\omega t)$ avec A et B polynômiales de même degré que P
   - ⚠ on pense a utiliser le principe de superposition judicieusement
3) Méthode de variation de la constante :
   on cherche y_0 sous la forme $y_0 : t \mapsto \lambda(t)e^{-at}$,
   on calcule y_0', on injecte dans E.
   Après simplifications il ne reste qu'une expression de la forme $\lambda'(t) = \cdots$, et on termine avec un calcul de primitive.
   Remarque : La contante d'intégration fait apparaître la solution générale de E_0

c) équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène

Il s'agit du cas où a est une fonction continue sur I et $f = 0$. La méthode est la suivante :

1) on calcule une primitive A de a.
2) on simplifie l'expression $e^{-A(t)} = s(t)$
   ⚠ ⚠ ⚠ ce n'est pas $e^{-A(t)t}$ ou $e^{-A(t)x}$ ou d'autres âneries de cet acabit!!!!!
3) on a alors :

$$\mathscr{S}_I(E) = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \lambda s(t) \end{array}, \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$

d) équation différentielle linéaire d'ordre 1

Dans ce cas général, on peut soit décomposer comme dans le cas coefficients constants, sauf que la seule méthode applicable est la variation de la constante.

On peut aussi utiliser le théorème complet suivant (qui s'applique aussi dans les cas précédents) :

Théorème n°1

Soit l' équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$E' : y' + a(x)y = f(x)$$

avec a et f continues sur I.
On a, en notant A une primitive de a et en fixant $t_0 \in I$:

$$\mathscr{S}_I(E) = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & e^{-A(t)}\left(\lambda + \int_{t_0}^{t} e^{A(s)} f(s) \mathrm{d}s\right) \end{array}, \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$

Remarque : Lorsqu'on applique ce théorème, il est très important de bien décomposer les calculs :
– recherche de A
– simplification de $e^{-A(t)}$
– simplification de $e^{A(s)} f(s)$
– calcul de la primitive de $s \mapsto e^{A(s)} f(s)$

IV équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants est de la forme :

$$E : ay'' + by' + cy = f(x)$$

avec $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ et f fonction continue sur un intervalle I.

a) équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants

Dans ce cas là, f est la fonction nulle. Il s'agit donc de résoudre :

$$E_c : ay'' + by' + cy = 0$$

On appelle équation caractéristique associée a E l'équation polynômiale du second degré :

$$E_c : az^2 + bz + c = 0$$

Le théorème de résolution de l' équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants se décline n deux versions **i. cas complexe**

Théorème n°2

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et :

$$E : ay'' + by' + cy = 0$$

Soit $E_c : az^2 + bz + c = 0$ l'équation caractéristique associée à E. Deux cas se présentent :

1) E_c a deux racines distinctes λ_1 et λ_2, alors :

$$\mathscr{S}_I(E) = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \end{array}, (A, B) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

2) E_c a une racine double λ_0 alors :

$$\mathscr{S}_I(E) = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (At + B)e^{\lambda_0 t} \end{array}, (A, B) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

Remarques :.

- ⚠ ce résultat n'est valable que pour les équations à coefficients constants : a, b et c ne doivent pas dépendre de la variable x !!!
- On utilise souvent la méthode du discriminant pour résoudre E_c, mais il arrive aussi que ça soit inutile.

ii. cas réel

Théorème n°3

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et :

$$E : ay'' + by' + cy = 0$$

Soit E_c : $az^2 + bz + c = 0$ l'équation caractéristique associée à E. Trois cas se présentent :

1) E_c a deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2, alors :

$$\mathscr{S}_I(E) = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \end{array}, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

2) E_c a une racine réelle double λ_0 alors :

$$\mathscr{S}_I(E) = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (At + B)e^{\lambda_0 t} \end{array}, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

3) E_c a deux racines complexes conjuguées distinctes λ_1 et $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$.
En écrivant $\lambda_1 = \alpha + i\omega$ sous forme algébrique, on a :

$$\mathscr{S}_I(E) = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{\alpha t} \left(Acos(\omega t) + Bsin(\omega t) \right) \end{array}, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Remarques :.

- ⚠ ce résultat n'est valable que pour les équations à coefficients constants : a, b et c ne doivent pas dépendre de la variable x !!!
- On utilise souvent la méthode du discriminant pour résoudre E_c, mais il arrive aussi que ça soit inutile.
- Dans le $3^{\text{ième}}$ cas les solutions peuvent se mettre aussi sous la forme $t \mapsto Ae^{\alpha t} cos(\omega t + \varphi)$ avec $A \in \mathbb{R}_+$ appelé "amplitude maximale" et $\varphi \in [0, 2\pi[$ appelé "déphasage". Cette forme est très utilisée en SI et en physique.

b) équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

Pour résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, on décompose en résolvant d'abord l' équation homogène puis en cherchant une solution particulière de l'équation complète : y_H. Alors :

$$\mathscr{S}_I(E) = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \lambda y_H(t) + y_0(t) \end{array}, \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$

y_H est donné par l'application du théorème précédent dans la version adéquate. Pour trouver y_0 on dispose de plusieurs méthodes, à tester dans l'ordre donné ci-dessous :

1) ⚠ penser à chercher une "solution évidente"
2) Selon la forme du second membre :
   – si f est de la forme $t \mapsto P(t)e^{mt}$ avec P polynômiale,
     alors on cherche y_0 sous la forme $t \mapsto Q(t)e^{mt}$avec :
     – $d°Q = d°P$ si m n'est pas racine de E_c
     – $d°Q = d°P + 1$ si m est racine simple de E_c, il est alors inutile de chercher le terme constant.
     – $d°Q = d°P + 2$ si m est racine double de E_c, il est alors inutile de chercher le terme constant et celui de degré 1.

- si f est de la forme $t \mapsto P(t)cos(\omega t + \varphi)$ avec P polynômiale,
  alors on cherche y_0 sous la forme $t \mapsto A(t)cos(\omega t) + B(t)sin(\omega t)$ avec A et B polynômiales de même degré que P (ou de degré $+1$ si $i\omega$ est racine simple de E_c et $+2$ s'il est racine double).
- ⚠ On pense a utiliser le principe de superposition judicieusement

3) Des méthodes de variation "d'une constante" ou "des constantes" seront présentées lorsque nous ferons le cours de spé sur les équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients variables.

V Autres équations différentielles classiques

a) Equations à variables séparables

Il s'agit d'équations qui peuvent être transformées ("a les même solutions que"), en une équation de la forme :

$$E : f(y)y' = g(x)$$

Ce que les physiciens et les ingénieurs écrivent $f(y)\mathrm{d}y = g(x)\mathrm{d}x$.

On est alors ramené à un simple calcul de primitives puisque "$f(y)y' = (F(y)'$" si F est une primitive de f. Il faut bien entendu chercher ensuite une réciproque de F, ce qui constitue la partie ardue de la résolution.

Exemple.
$E : y' = x\sqrt{y}$

b) Equations incomplètes en x du premier ordre

Il s'agit des équations ou la variable n'apparaît pas :

$$E : F(y, y') = 0$$

L'idée est d'essayer de paramétrer la courbe de niveau $F(X, Y) = 0$ par $\gamma(t) = (X(t), Y(t))$. On ne peut pas forcément exprimer une solution mais on peut paramétrer les courbes intégrales (courbes représentatives des solutions).

En effet : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y(x)) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}y'(x)$, ainsi $y(x(t)) = X(t)$ et $y'(x(t)) = Y(t)$ permettent d'obtenir $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{t}} = \dfrac{X'(t)}{Y(t)}$. En primitivant on obtient le paramétrage attendu. Il arrive parfois qu'on puisse ensuite "éliminer" t pour exprimer y en fonction de x.

Exemple.
$E : y = y'^2 + y'$

c) Equations incomplètes en y du premier ordre

Il s'agit des équations ou la fonction y n'apparaît pas :

$$E : F(x, y') = 0$$

L'idée est encore d'essayer de paramétrer la courbe de niveau $F(X, Y) = 0$ par $\gamma(t) = (X(t), Y(t))$. On ne peut pas forcément exprimer une solution mais on peut paramétrer les courbes intégrales (courbes représentatives des solutions).

Cette fois-ci : $x(t) = X(t)$ et $y'(x(t)) = Y(t)$. Ainsi $y'(x(t))x'(t) = Y(t)X'(t)$, soit $(y \circ x)'(t) = Y(t)X'(t)$ et en primitivant on obtient $y(x(t))$.

Exemple.
$E : x = e^{y'} + y'$

d) Equation d'Euler

Ce sont les équations différentielles linéaires d'ordre 2 de la forme :

$$E : ax^2y'' + bxy' + cy = f(x)$$

Il faut alors étudier dans un premier temps sur $\mathbb{R}_+^*$ et poser le changement de variable $x = e^u$ alors $z(u) = y(e^u$ puis $z'(u) = e^u y'(e^u)$ soit en abrégé :$z' = xy'$. Il vient ensuite $z'' = x^2y'' + xy'$ soit $x^2y'' = z'' - z'$ et donc z satisfait :

$$E' : az'' + (b - a)z' + cz = f(e^u)$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

Exemple.
$E : x^2y'' + 2xy' + y = 1$

e) Equation de Bernouilli

Ce sont les équations de la forme :

$$E : a(x)y' + b(x)y = c(x)y^{\alpha}$$

avec α réel distinct de 0 ou 1.

En divisant par y^{α}, on voit apparaître une équation différentielle linéaire d'ordre 1 en $z = y^{1-\alpha}$

Remarque : ⚠ il ne s'agit pas d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ayant $c(x)y^{\alpha}$ comme second membre.

Exemple.
$E : xy' + y = y^2 ln(x)$

f) Equation de Riccatti

Ce sont les équations de la forme :

$$E : a(x)y' + b(x)y + c(x)y^2 = d(x)$$

avec α réel distinct de 0 ou 1.

Cette équation ressemble à la précédente. La résolution nécessite la connaissance d'une solution particulière y_0, que l'on peut obtenir comme solution "évidente", en la cherchant polynômiale, voire sous forme d'une série entière.

En posant alors $z = y - y_0$ on se ramène a une équation de Bernouilli dans le cas $\alpha = 2$.

Exemple.
$E : x^3y' + y^2 + yx^2 + 2x^4 = 0$ on donne $(y_0 = -x^2)$

g) Equation de Lagrange

Ce sont les équations de la forme :

$$E : y = xf(y') + g(y')$$

L'idée est de dériver l'équation et de chercher $z = (y')^{-1}$ (réciproque de y'), car l'équation obtenue est alors une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Exemples.
$E_1 : y = xy' + y^2$ (équation de Clairaut)
$E_2 : y = xy'^2 - \dfrac{1}{y'}$