Le problème se propose d'étudier par diverses méthodes une intégrale dépendant d'un paramètre. Cette intégrale provient de l'étude du « noyau de Poisson »

$$z \mapsto \mathrm{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

défini sur le disque unité ouvert du plan complexe. Elle permet d'établir un lien entre séries entières et séries de Fourier.

Les sous-parties III.B, III.C et III.D donnent des méthodes différentes en vue d'un même résultat. Elles doivent être traitées comme indépendantes entre elles.

On utilise les notations habituelles pour les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

I Règle de convergence d'Abel

I.A – Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle décroissante qui converge vers 0, et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite complexe telle que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $B_n = b_1 + \cdots + b_n$ est bornée.

I.A.1) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$$

I.A.2) En déduire que la série $\sum a_n b_n$ converge.

I.A.3) **Application**

Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge.

I.B – On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$, où x est une variable réelle.

I.B.1) Montrer que cette série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$.

I.B.2) Montrer qu'elle ne peut pas être la série de Fourier d'une fonction 2π-périodique continue par morceaux.

I.C – Soit p la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$p(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n}}$$

I.C.1) Montrer que p est bien définie, continue et 2π-périodique.

I.C.2) Déterminer la série de Fourier de p.

I.C.3) Montrer que la fonction p n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

II Étude de la série entière $\sum \frac{e^{in\theta}}{n} x^n$

II.A – Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

II.A.1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum \frac{e^{in\theta}}{n} x^n$.

II.A.2) Soit g la fonction de $]-1,1[$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} x^n$$

a) Montrer que g est de classe C^1 sur $]-1,1[$ et que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$g'(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - x}{x^2 - 2x\cos\theta + 1}$$

b) Montrer que, si $x \in]-1,1[$,

$$h(x) = -\frac{1}{2}\ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1) + \mathrm{i}\ \arctan\left(\frac{x\sin\theta}{1 - x\cos\theta}\right)$$

est bien défini et que $h(x) = g(x)$.

II.B – Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

II.B.1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}}{k} = \int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{1 - (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}t)^n}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}t}\mathrm{d}t$$

II.B.2) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}}{k} = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}t}\,\mathrm{d}t$$

II.B.3) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}}{k} = -\frac{1}{2}\ln(2 - 2\cos\theta) + \mathrm{i}\ \arctan\left(\frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta}\right)$$

II.B.4) Montrer que, pour tout $\theta \in]0,\pi[$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{\pi - \theta}{2}$$

II.C – Soit $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction 2π-périodique, impaire, telle que $\forall \theta \in]0,\pi]$, $r(\theta) = \dfrac{\pi - \theta}{2}$.

II.C.1) Justifier l'existence et l'unicité de r.

II.C.2) Déterminer la série de Fourier de r.

II.C.3) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

III Calcul de $\displaystyle\int_0^\pi \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\,\mathrm{d}\theta$

III.A.1)

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\,\mathrm{d}\theta$ converge.

III.A.2) Montrer que, quand x tend vers $+\infty$,

$$2\pi\ln(x) - \int_0^\pi \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\,\mathrm{d}\theta$$

admet une limite, que l'on déterminera.

III.A.3) Montrer que $x \mapsto \displaystyle\int_0^\pi \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\,\mathrm{d}\theta$ est une fonction paire de la variable $x \in \mathbb{R}$.

III.B – Première méthode de calcul : séries de Fourier

III.B.1) Soit $x \in]-1,1[$.

Déterminer la série de Fourier de la fonction $\widetilde{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\widetilde{h}(\theta) = \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)$.

On pourra utiliser le résultat de la question II.A.2.

III.B.2) En déduire que, pour tout $x \in]-1,1[$, on a $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\,\mathrm{d}\theta = 0$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\,\mathrm{d}\theta$ dans le cas $|x| > 1$.

III.B.3) Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$ converge.

III.B.4) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi/2} \ln(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi/2} \ln(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

III.B.5) En déduire que $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = -\pi\ln 2$.

III.B.6) En déduire que $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(2 - 2\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \ln(2 + 2\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0$.

III.C – Une deuxième méthode : intégrale dépendant d'un paramètre

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\,\mathrm{d}\theta$.

III.C.1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\} \qquad f'(x) = \int_0^{\pi} \frac{2x - 2\cos\theta}{x^2 - 2x\cos\theta + 1}\,\mathrm{d}\theta$$

III.C.2) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$

$$f'(x) = 4\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)t^2 + (x-1)}{((x+1)^2t^2 + (x-1)^2)(t^2+1)}\mathrm{d}t$$

III.C.3) En déduire que

$$f(x) = \begin{cases} 2\pi\ln(|x|) & \text{si } |x| > 1 \\ 0 & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$$

III.C.4) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et que $f(1) = f(-1) = 0$.

III.D – Troisième méthode : racines de l'unité

III.D.1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$

$$\int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\,\mathrm{d}\theta = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{n} + 1\right)\right)$$

III.D.2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(x^n - 1)^2 = \prod_{k=1}^{n} \left(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{n} + 1\right)$$

III.D.3) En déduire que

$$\int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 4\pi\ln(|x|) & \text{si } |x| > 1 \\ 0 & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$$

III.D.4) En déduire $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\,\mathrm{d}\theta$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.

III.D.5) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{n} + 1\right) = \Big(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\Big)^2$$

III.D.6) Montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

III.D.7) En déduire que

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = -\pi\frac{\ln 2}{2}$$

Retrouver alors le résultat de la question III.B.6.

IV Théorème de convergence radiale

IV.A – Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On suppose que la série $\sum a_n$ converge. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et on définit les fonctions s_n et s de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ par $s_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $s(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$.

IV.A.1) Justifier l'existence de s.

IV.A.2) Soit $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer

$$s(x) - s_n(x) = r_n x^{n+1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} r_k(x^k - x^{k+1})$$

IV.A.3) Montrer que s est continue sur $[0,1]$.

IV.A.4) Application : retrouver le résultat de la question II.B.3.

IV.B – Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le développement en série entière de la fonction

$$x \mapsto \frac{1-x^2}{x^2 - 2x\cos\theta + 1}$$

sur un intervalle que l'on précisera.

IV.C – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$. On considère la série de Fourier de f en cosinus et sinus, notée

$$c_0 + \sum_{n\geq 1}\big(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)\big)$$

IV.C.1) Montrer que, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\big(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)\big)x^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-x^2)f(u)}{x^2 - 2x\cos(t-u) + 1}\,\mathrm{d}u$$

IV.C.2) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-x^2)f(u)}{x^2 - 2x\cos(t-u) + 1}\,\mathrm{d}u$$

• • • FIN • • •