1 Le programme sur ce sujet :

Voici un copier-coller du programme officiel pour le concours de cette année :

13.1 Intégrales multiples

Tous les théorèmes de ce paragraphe sont admis.

Intégrales curvilignes, longueur d'un arc de courbe, travail d'une force.

Formule de Fubini et définition de l'intégrale double d'une fonction continue sur un rectangle $[a, b] \times [c, d]$. Adaptation à l'intégrale triple.

Théorème de Fubini-Tonelli : Si f est une fonction de deux variables continue positive sur un rectangle borné ou non, on peut intervertir l'ordre des intégrations ; lorsque la valeur commune de ces intégrales est finie, f est dite intégrable et son intégrale double est cette valeur commune.

Si f est une fonction complexe de deux variables continue sur un rectangle borné ou non, on dit que f est intégrable si son module est intégrable. Dans ce cas, on peut intervertir l'ordre des intégrations et l'intégrale de f est la valeur commune des deux intégrales superposées.

Extension des résultats précédents au cas de fonctions de plusieurs variables.

Extension au cas du produit d'une fonction de plusieurs variables continue positive par une fonction indicatrice d'un ensemble géométriquement simple. Linéarité et additivité relativement à la fonction et relativement aux ensembles.

Applications à des calculs d'intégrales.

Théorème du changement de variables ; passage en coordonnées polaires.

Exemples de calculs d'aires planes et de volumes.

2 Rappels de cours

Quelques rappels de cours seront proposés pendant la première heure de la séance.

Ils porteront sur les points suivants :

1. L'intégrale double sur un rectangle d'une fonction continue par morceaux. Théorème de Fubini "basique".
2. Compacts élémentaires et Théorème de Fubini correspondant.
3. Théorème de Fubini-Tonelli : intégrale double sur un rectangle "généralisé" d'une fonction continue positive.
4. Fonctions de deux variables intégrables.
5. Extension aux intégrales triples ... Et plus !
6. Théorème de changement de variables.

3 Exercices

Remarque : Dans un exercice sur les intégrales multiples, il est fortement conseillé de toujours commencer par représenter, au moins schématiquement, le domaine d'intégration, même si la question n'est pas posée.

1) Calculer les intégrales multiples suivantes :

a) $\displaystyle\iint_\Omega |x+y|\,dxdy$ où $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \max(|x|, |y|) < 1\right\}$

b) $\displaystyle\iint_\Omega x\left(2x^2+y^2\right)dxdy$ où $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^4 + x^2y^2 + y^4 < 1\right\}$

2) Calculer $I = \displaystyle\int_0^3 \left(\int_{\frac{x}{3}}^1 e^{-y^2}dy\right)dx$

3) Montrer que $\displaystyle\iiint_\Omega (ax+by+cz)^2\,dxdydz = \frac{4\pi}{15}\left(a^2+b^2+c^2\right)$, où Ω est la sphère unité.

(On ne calculera que $\displaystyle\iiint_\Omega x^2 dxdydz$, le reste s'obtenant par des arguments de symétrie.)

4) Intégrale de Gauss

Soit $R \in \mathbb{R}_+$

$$D_R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \le R^2\right\}$$

$\Delta_R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \max\left(|x|, |y|\right) \leq R\right\}$

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_+^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & e^{-\left(x^2+y^2\right)} \end{array}$$

$$I_R = \iint_{D_R} f \text{ et } J_R = \iint_{\Delta_R} f$$

a) Représenter D_R, Δ_R et $D_{\sqrt{2}R}$,

b) En déduire que : $I_R \leq J_R \leq I_{\sqrt{2}R}$,

c) Calculer I_R

d) En déduire $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt$

5) a) Justifier la convergence de l'intégrale :$I = \displaystyle\iiint_\Omega \frac{dxdydz}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)}$ où $\Omega = [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R}_+$

b) Calculer I

c) En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan^2 t dt}{t^2}$

6) a) Montrer que : $\forall y > 0, \displaystyle\int_y^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt\right) dx = 2y \int_y^{+\infty} \frac{\sin t}{t^3} dt - \frac{\sin y}{y}$

b) En déduire la valeur de : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\int_1^{+\infty} \frac{\sin(ux)}{u} du\right) dx$

c) L'intégrale $\displaystyle\iint_\Omega \frac{\sin(ux)}{u} dudx$ où $\Omega = [0, +\infty[\times [1, +\infty[$ est-elle définie ?

7) S'il reste du temps on s'intéressera au volume de l'hyper-sphère unité en dimension n...