Ajout pour les préliminaires du sujet Mines-Ponts 2010, filière PC, Mathématiques 1.
Inspiré de la partie II du second sujet de l'Agrégation Interne 2009.

Ajout inspiré du sujet II de l'Agreg. Interne 2009. Les questions bis 2., bis 3. et bis 4. ne servent pas dans la suite de l'énoncé.

Question bis 1. On démontre d'abord qu'une fonction g de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est nécessairement bornée. En effet, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, il existe un réel a tel que pour tout $x \geq a$ on a $|g(x)| \leq 1$. De même, puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$, il existe un réel b tel que pour tout $x \leq b$ on a $|g(x)| \leq 1$. On pose alors $c = \max\{|a|, |b|\}$, et on remarque que dans ce cas pour tout réel $x \in]-\infty, -c] \cup [c, +\infty[$ on a $|g(x)| \leq 1$. Comme g est continue sur le segment $[-c, c]$, elle est bornée sur ce segment : il existe un réel M tel que $|g(x)| \leq M$ pour tout $x \in [-c, c]$. Puisque $M + 1 \geq M$ et $M + 1 \geq 1$, on déduit de ce qui précède que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |g(x)| \leq M + 1$$

et donc g est bornée sur $\mathbb{R}$.

On a déjà vu la majoration

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}, \qquad |f(t)g(x-t)| \leq \|g\|_\infty f(t)$$

En intégrant en t sur $\mathbb{R}$, et en se souvenant que $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 1$, on obtient alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \left|\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)g(x-t)|dt \leq \int_{\mathbb{R}} \|g\|_\infty f(t)dt = \|g\|_\infty$$

On a donc bien obtenu $\|f * g\|_\infty \leq \|g\|_\infty$.

Question bis 2. On sait déjà que la fonction $f * g$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. On vérifie les hypothèses de dérivation de l'intégrale d'une fonction à paramètre : soit $F : (x, t) \mapsto f(t)g(x-t)$ alors

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto F(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (question Q1);
- la fonction F admet une dérivée partielle $F'_x(x, t) = f(t)g'(x-t)$ pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto F'_x(x, t) = f(t)g'(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues (car g est supposée $\mathcal{C}^1$);
- on a de plus

  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}, \qquad |F'_x(x, t)| = |f(t)g'(x-t)| \leq \|g'\|_\infty f(t)$$

  où la fonction $t \mapsto \|g'\|_\infty f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ puisque $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\int$ et conclure que $\mapsto \int_{\mathbb{R}} F(x, t)dt = f * g(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec pour dérivée

$$t \mapsto \int_{\mathbb{R}} F'_x(x, t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)g'(x-t)dt = f * (g')(x)$$

Enfin, puisque g' est bornée sur $\mathbb{R}$ et continue, le même raisonnement qu'à la question Q1 permet de conclure que $f * (g')$ est continue sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Question bis 3. On rappelle le théorème de Fubini-Tonelli du programme de l'agrégation interne : si h est une fonction de deux variables continue et positive sur un rectangle (borné ou non), alors on peut intervertir l'ordre des intégrations; lorsque la valeur commune des deux intégrales est finie, f est dite intégrable et son intégrale double est cette valeur commune. Si h est à valeurs complexes, on dit que h est intégrable si son module $|h|$ est intégrable, et dans ce cas on peut intervertir l'ordre des intégrations pour h.

Ici, on doit démontrer que la fonction d'une variable $f * g$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ puis calculer son intégrale. Cela revient à calculer l'intégrale double :

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,dt\right) dx$$

Il suffit donc de démontrer que la fonctions à valeurs réelles $(x,t) \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$. Pour cela, il suffit de démontrer que $(x,t) \mapsto |f(t)g(x-t)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$. Or comme g est intégrable sur $\mathbb{R}$ on en déduit que $|g|$ est intégrable et à t fixé on peut effectuer le changement variable $y = x - t$ pour obtenir

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \int_{\mathbb{R}} |g|(x-t)dx = \int_{\mathbb{R}} |g|(y)dy$$

par conséquent on peut calculer

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)g(x-t)|\, dx \right) dt &= \int_{\mathbb{R}} |f|(t) \left(\int_{\mathbb{R}} |g|(x-t)\, dx \right) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f|(t) \left(\int_{\mathbb{R}} |g|(y)\, dy \right) dt == \int_{\mathbb{R}} f(t)dt \int_{\mathbb{R}} |g|(y)dy = \int_{\mathbb{R}} |g|(y)dy\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que f est positive et que son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1. Comme cette intégrale double est finie, on en déduit que $(x,t) \mapsto |f(t)g(x-t)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ et donc on peut intervertir l'ordre d'intégration, ce qui permet d'obtenir comme ci-dessus :

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\, dt \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\, dx \right) dt = \int_{\mathbb{R}} g(y)dy$$

Question bis 4.a. Puisque f est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'intégrale 1, on a

$$\lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

et donc

$$\lim_{A \to +\infty} \int_{-\infty}^{-A} f(x)dx + \int_{A}^{+\infty} f(x)dx = 0.$$

On en déduit que pour tout $\delta > 0$ fixé il existe A tel que

$$\int_{-\infty}^{-A} f(x)dx + \int_{A}^{+\infty} f(x)dx \; < \; \delta$$

Question bis 4.b. On fixe $\varepsilon > 0$. Soit $B > 0$, en effectuant le changement de variables $y = \varepsilon\, x$ dans l'intégrale

$$\int_{-B}^{B} f(x)dx = \int_{-\frac{B}{\varepsilon}}^{\frac{B}{\varepsilon}} \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) dx = \int_{-\frac{B}{\varepsilon}}^{\frac{B}{\varepsilon}} \theta_\varepsilon(y)dy$$

et en passant à la limite quand $B \to +\infty$ on obtient que θ_ε est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'intégrale 1. Pour tout réel x fixé on peut alors calculer

$$\begin{aligned}|\theta_\varepsilon * g(x) - g(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \theta_\varepsilon(t)g(x-t)dt - g(x) \int_{\mathbb{R}} \theta_\varepsilon(y)dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} \theta_\varepsilon(t)(g(x-t) - g(x))dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}} \theta_\varepsilon(t)|g(x-t) - g(x)|dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) |g(x-t) - g(t)|dt = \int_{\mathbb{R}} f(y)|g(x-\varepsilon y) - g(x)|dt\end{aligned}$$

où on a effecuté le changement de variables $y = \frac{t}{\varepsilon}$ pour la dernière inégalité.

Question bis 4.c. Puisque g est bornée sur $\mathbb{R}$, on a $|g(x-\varepsilon y) - g(x)| \leq 2\|g\|_\infty$ pour tous les réels x et t. On obtient alors pour tout $x \in J$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(y)|g(x-\varepsilon y) - g(x)|dt &= \int_{-\infty}^{-A} f(y)|g(x-\varepsilon y) - g(x)|dt + \int_{-A}^{A} f(y)|g(x-\varepsilon y) - g(x)|dt \\ &\quad + \int_{A}^{+\infty} f(y)|g(x-\varepsilon y) - g(x)|dt \\ &\leq 2\|g\|_\infty \left(\int_{-\infty}^{-A} f(x)dx + \int_{A}^{+\infty} f(x)dx \right) + \int_{-A}^{A} f(y)|g(x-\varepsilon y) - g(x)|dt \\ &\leq 2\delta\|g\|_\infty + \int_{-A}^{A} f(y) \sup_{x' \in J} |g(x'-\varepsilon y) - g(x')|dy\end{aligned}$$

et on conclut grâce à la question précédente.

Question bis 4.d. On écrit le segment J sous la forme $J = [j_0, j_1]$. Puisque g est continue sur $\mathbb{R}$ elle est en particulier continue sur le segment $[j_0 - A, j_1 + A]$: on applique le théorème de Heine pour conclure que g est uniformément continue sur ce segment. En particulier, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x', z' \in [j_0 - A, j_1 + A], \qquad |x' - z'| \leq \eta \Rightarrow |g(x') - g(z')| \leq \delta$$

Si on choisit $\varepsilon = \frac{\eta}{A+\eta}$ alors $0 < \varepsilon < 1$ et pour tout $y \in [-A, A]$ et tout $x \in J$ on a $x - \varepsilon y \in [j_0 - A, j_1 + A]$ et $|(x - \varepsilon y) - x| = \varepsilon |y| \leq \eta$. On a alors

$$\sup_{x \in J} |g(x - \varepsilon y) - g(x)| \leq \delta$$

et donc

$$\sup_{x \in J} |\theta_\varepsilon * g(x) - g(x)| \ \leq \ \delta(2\|g\|_\infty + 1).$$

Puisqu'on peut appliquer le même raisonnement pour tout $\delta > 0$ on en déduit :

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0, \qquad \sup_{x \in J} |\theta_\varepsilon * g(x) - g(x)| \ \leq \ \delta$$

ce qui permet de conclure que la famille de fonctions $\theta_\varepsilon * g$ converge uniformément vers g sur J quand ε tend vers 0.