POLYNÔMES.

1. (racines de l'unité, factorisations dans C puis R)

Factoriser le polynôme X^6-32X dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

2. (racines de l'unité, relation coefs/racines)

Soit n un entier naturel et le polynôme P défini par $P(X)=(X+1)^{2n}-(X^2-1)^n$.
a) Quel est le degré de P et son coefficient dominant ?
b) Montrer que -1 est racine d'ordre n de P.
c) Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.
d) En déduire pour n impair ≥3 la valeur de $\prod_{k=1}^{k=n-1} \tan(\frac{k\pi}{n})$.

3. (critère de multiplicité, relations coefs/racine, div euclidienne)

On considère le polynôme $P(X)=3X^n-X+2$ avec n entier supérieur ou égal à 3.

a) Montrer que P n'admet pas de racines multiples.
b) Déterminer la somme et le produit des n racines complexes de P.
c) Déterminer le reste de la division Euclidienne de P par X^2-1.

4. (diviseur commun et division euclidienne)

On considère les polynômes $P(X)=iX^4+(i-1)X^2-1$ et $Q(X)=X^3+iX^2+X+i$.
Montrer qu'ils admettent une racine commune.

5. (factorisation, dérivation, barycentre)

Soit P un elt de $\mathbb{C}[X]$ non constant dont la décomposition en produit de facteurs irréductibles est $P(z) = c\prod_{i=1}^{r} (z-a_i)^{n_i}$.

a) pour z qui n'est pas racine de P établir la relation $\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{z-a_i}$.

b) Pour z qui est racine de P' mais pas de P déduire la relation $\left(\sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{|z-a_i|^2}\right)z = \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{|z-a_i|^2} a_i$

c) le théorème de Gauss Lucas : montrer que toutes les racines de P' sont barycentre à coefs positifs des racines de P.

6. (divisibilité dans les entiers, irréductibilité)
a) Soit $P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$ un élément de $\mathbb{Z}[X]$ de degré n et soient p,q des entier relatif premiers entre eux tels que $\frac{p}{q}$ est racine de P.
Montrer que p divise a_0 et q divise a_n

b) en déduire une méthode pour trouver les racine rationnelles d'un polynome à coefs entiers.

7. (pgcd dans les entiers)
Etant donné un élément P de $\mathbb{Z}[X]$ on note c(P) le pgcd des coefs de P.

a) Vérifier que pour tout $P \in \mathbb{Z}[X]$ le polynôme $P_1 = \dfrac{P}{c(P)}$ est encore dans $\mathbb{Z}[X]$ et vérifie $c(P_1) = 1$

b) Montrer que pour $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ vérifiant $c(Q) = c(P) = 1$ on a $c(PQ) = 1$.
(<u>aide:</u> ecrire $P(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n$ et considérer un nombre permier p. Considérer le plus grand indice k tels que p ne divise pas a_k. Obtenir de la même façon un coef b_l de Q et prouver que p ne divise pas le coef du terme de degré k+l de PQ .)
c) Montrer que pour tout $P, Q \in Z[X]$ on a $c(PQ) = c(P)c(Q)$.
d) En déduire que si P est dans $\mathbb{Z}[X]$ et est réductible dans $\mathbb{Q}[X]$, alors il est réductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

8. ($\mathbb{Q}[X]$ est principal, polynôme minimal, critère de multiplicité, décomposition en produit de polynômes irréductibles) Dans cet exercice les polynômes considérés sont des éléments de $\mathbb{Q}[X]$.

a) Montrer que si P est un polynôme irréductible, toutes ses racines complexes sont simples.

b) (application 1)
Montrer que si P est un polynôme admettant une racine α de multiplicité m tel que $m > \dfrac{\deg(P)}{2}$, alors α est rationnelle.

c) (application 2)
Montrer que si P est de degré 2n+1 et admet une racine complexe de multiplicité au moins n alors P admet une racine rationnelle.

9. (fonction continue sur un compact de C atteint son max, formule de Taylor pour les polynômes)

L'objectif est de montrer que tout polynôme non constant admet au moins une racine complexe

a) Soit P un elt de $\mathbb{C}[X]$ non constant et $z_0 \in \mathbb{C}$ tq $P(z_0) \neq 0$. Montrer que tout voisinage de z_0 contient un complexe z tel que $|P(z)| < |P(z_0)|$.

b) On suppose de plus que P n'admet pas de racine complexe; en étudiant le sup de $z \mapsto \dfrac{1}{|P(z)|}$, trouver une contradiction avec la question a); conclure.

10. Quelques pistes pour réinvestir à l'oral :

Pour un lien polynômes /determinant : voir « résultant de deux polynômes ».
Pour plus de résultat sur les polynômes à coefs entiers : voir « critère d'Eisenstein ».
Pour le cas des polynômes sur un corps fini: voir « codes de Goppa », ou encore « non isomorphisme entre polynômes et fonctions pôlynômes ».
Pour exploiter la factorialité: voir « polynômes minimaux »(d'endomorphismes, de suites récurrentes linéaires ou de nombres algébriques).
RQ: Le Gourdon d'algèbre est une bonne référence pour les polynômes.