1 Méthode

Soit $f : \Delta \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$ et $m \geq 2$, sur le domaine Δ. L'objectif est de déterminer les extrema de f.
On suppose que Δ est donné sous la forme suivante :

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^m | \alpha_1(x) \leq 0, \cdots, \alpha_p(x) \leq 0, \beta_1(x) < 0, \cdots, \beta_q(x) < 0\}$$

où les α_i et les β_j sont des fonctions "suffisamment régulières" appelées les bords de Δ.
(les α_i sont les bords "fermés" et les β_j les bords "ouverts".)

étape 1 : recherche des candidats à l'intérieur de Δ : le "théorème des extrema locaux" nous assure qu'il faut chercher ceux-ci parmi les points ou le gradient s'annule, on résout donc le système $\overrightarrow{Grad}(f)(x) = \overrightarrow{0}$ en retenant uniquement les solutions qui sont dans $\mathring{\Delta}$

étape 2 : recherche des candidats sur les bord fermés : pour chaque bord fermé α_i on paramétrise la surface $\alpha_i(x) = 0$ par une nappe γ_i, on recherche les extrema de la fonction de $m-1$ variables réelles $f \circ \gamma_i$. On retient de plus comme candidats les "extrémités" des bords.

étape 3 : études de chaque candidats :
- pour les candidats trouvés sur les bords il faut faire une étude "élémentaire",
- pour ceux trouvés dans $\mathring{\Delta}$, on dispose de la formule de Taylor d'ordre deux lorsque $k \geq 2$: si $m = 2$ il s'agit de la méthode du $rt - s^2$ si $m \geq 3$ il faut réduire la hessienne.

2 Exercices

---

1) Extrema locaux et globaux de

$$f : (x, y) \mapsto 27\,x^3 y - 3\,x - 8\,y + 1$$

sur $\Delta = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 0\right\}$

---

2) Déterminer les extrema de f sur Δ avec

$$f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2 \text{ et } \Delta = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leqslant 4\right\}$$

---

3) Déterminer les extrema locaux et globaux sur $\mathbb{R}^3$ de

$$f : (x, y, z) \mapsto 2\,x^2 y + xyz - 2\,yz + 4\,z$$

---

4) Soit $a > 0$. Montrer que

$$f : (x, y) \mapsto x + y + \frac{a}{xy}$$

admet un minimum strict sur $(\mathbb{R}^{+\star})^2$

---

5) $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leq \frac{1}{2} \text{ et } |y| \leq \frac{1}{2}\}$, déterminer les extrema locaux de $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + \cos(x^2 + y^2)$ sur $\mathring{\Delta}$ puis sur Δ

---

6) a) Etudier les branches infinies, les variations, la convexité et représenter $f(t) = t - \ln t - \dfrac{1}{t}$.

b) Résoudre $f(t) = 0$.

c) Trouver les extremums globaux et locaux de

$$g(x, y) = x \ln y - y \ln x$$

---

7) Déterminer :

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3}\left\{\int_0^{+\infty}(e^x-a-bx-cx^2)^2e^{-3x}\mathrm{d}x\right\}$$

---

8) On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel noté $\langle .\mid .\rangle$. Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

a) Montrer que

$$\forall x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\,,\langle f(x)\mid x\rangle>0$$

b) Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ l'application définie par

$$g(x)=\frac{1}{2}\langle f(x)\mid x\rangle-\langle u\mid x\rangle$$

Montrer que g admet des dérivées partielles selon tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ et les expliciter.

c) Montrer que g admet un unique point critique noté z.

d) Montrer que g admet un minimum global en z.

---

9) Soit (ABC) un vrai triangle du plan. Pour un point M du plan, on pose

$$f(M)=MA+MB+MC$$

a) Etudier la différentiabilité de f.

b) En considérant le disque fermé de centre A et de rayon $AB+AC$, établir que f possède un minimum absolu dans le plan.

c) Soit T un point où ce minimum est atteint. On suppose que T n'est pas un sommet du triangle.
Etablir

$$\frac{\overrightarrow{TA}}{TA}+\frac{\overrightarrow{TB}}{TB}+\frac{\overrightarrow{TC}}{TC}=\vec{0}$$

d) Montrer qu'alors le point T voit les sommets du triangle sous un même angle.
