**Préparation à l'Agrégation Interne 2013,**
**Correction du problème sur le laplacien discret.**

## Commentaires préliminaires.

Ce sujet a été librement inventé à partir de la discrétisation du problème de Dirichlet en dimensions 1 et 2 par la méthode des différences finies, suite à une discussion avec Ludovic Rifford.

## Partie I: cas de la dimension 1.

### A. Approche algèbrique.

**A.1.a.** On démontre $H_N^1$ est le noyau de l'application linéaire $f_N - id_N$:

$$\begin{aligned} v \in ker(f_N - id_N) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall i \in \{1, \ldots, N\} \qquad f(v)_i = v_i \\ &\Leftrightarrow \quad \forall i \in \{2, \ldots, N-1\} \qquad \frac{v_{i-1} + v_{i+1}}{2} = v_i \quad \Leftrightarrow \quad v \in H_N^1 \,. \end{aligned}$$

**A.1.b.** La matrice $F_N$ de $f_N$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^N$ est:

$$F_N := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On a en particulier $F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $F_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

**A.1.c.** On a $F_N - I_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

La famille des vecteurs lignes est liée (elle contient le vecteur nul), donc le déterminant de cette matrice est nul.

**A.2.a.** L'équation homogène pour cette suite arithmético-géométrique est $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$, qui admet $-\frac{1}{2}$ comme racine double. On sait que la suite $x_n$ est alors de la forme $(-\frac{1}{2})^n(\alpha + \beta\, n)$, et on trouve $\alpha = \beta = 1$ par identification sur les deux premiers termes, d'où:

$$\forall n \geq 1, \qquad x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (1+n)\,.$$

On voit facilement que $x_n \neq 0$ pour tout $n \geq 1$.

**A.2.b.** On remarque que $det(G_1) = -1$, $det(G_2) = \frac{3}{4}$. Pour $n \geq 1$, en développant le déterminant de $G_{n+2}$ par rapport à la première ligne on obtient

$$det(G_{n+2}) \;=\; -det(G_{n+1}) - \frac{1}{2} det\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & G_n & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}\right),$$

et en développant le déterminant de droite par rapport à la première colonne on obtient $det(G_{n+2}) = -det(G_{n+1}) - \frac{1}{4}det(G_n)$. On en déduit que $det(G_n) = x_n$ pour tout $n \geq 1$, et donc que $det(G_n)$ est toujours non nul.

**A.3.** On remarque que $F_N - I_N = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & & & & \vdots \\ 0 & & G_{N-2} & & 0 \\ \vdots & & & & \frac{1}{2} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$ : la famille des vecteurs lignes est de rang au plus $N-2$, et puisque la matrice extraite $G_{N-2}$ est inversible (car de déterminant non nul) on en déduit que le rang de $F_N - I_N$ est $N-2$.
Le théorème du rang indique que la dimension du noyau $H_N^1$ de $f_N - id_N$ est $N - (N-2) = 2$.

**A.4.a.** Soit $v \in \mathbb{R}^N$, pour $i \in \{1, \dots, N\}$ on note $M_i$ le point de coordonnées $(x_i, y_i) = (i, v_i)$.

Si $v$ est harmonique, alors pour tout $i \in \{2, \dots, N-1\}$ le point $M_i$ est le milieu du segment $[M_{i-1}, M_{i+1}]$ et donc les points $M_{i-1}$, $M_i$ et $M_{i+1}$ sont alignés. Comme les points de $V$ sont distincts deux à deux, le fait que 3 points consécutifs $M_{i-1}$, $M_i$ et $M_{i+1}$ soient toujours alignés implique que tous les points sont alignés : on peut en effet démontrer par récurrence (forte) sur $k \in \{3, \dots, N\}$ que $M_1, M_2, \dots, M_k$ est sur la droite $(M_1, M_2)$ (c'est une droite car $M_1 \neq N_2$) :

- Initialisation : pour $k = 3$, cela découle du fait que $M_2$ est le milieu de $[M_2, M_3]$.
- Hérédité : si $k \in \{3, \dots, N-1\}$ est tel que $M_1, M_2, \dots, M_k$ est sur la droite $(M_1, M_2)$, alors les (vraies) droites $(M_1, M_2)$ et $(M_{k-1}, M_k)$ sont confondues, et comme le point $M_k$ est le milieu de $[M_{k-1}, M_{k+1}]$ et que ces trois points sont distincts, la droite $(M_{k-1}, M_k)$ est aussi confondue avec la droite $(M_k, M_{k+1})$, donc $M_{k+1}$ est aussi sur la droite $(M_1, M_2)$.

Réciproquement, supposons que les points $M_1, \dots, M_N$ sont alignés. Soit alors $i \in \{2, \dots, N-1\}$, les points $M_{i-1}$, $M_i$ et $M_{i+1}$ sont alignés donc les vecteurs $\overrightarrow{M_{i-1}M_i} = (1, v_i - v_{i-1})$ et $\overrightarrow{M_{i-1}M_{i+1}} = (2, v_{i+1} - v_{i-1})$ sont colinéaires. On en déduit de leurs abscisses respectives que $\overrightarrow{M_{i-1}M_i} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M_{i-1}M_{i+1}}$ et donc $v_i - v_{i-1} = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2}$ et donc $v_i = \frac{v_{i-1} + v_{i+1}}{2}$. Ceci étant valable pour tout $i \in \{2, \dots, N-1\}$, le vecteur $v$ est harmonique.

**A.4.b.** Soit $v$ harmonique tel que $v_1 = v_N = 0$. Dans ce cas $M_1 = (1, 0)$ et $M_N = (N, 0)$, la droite qui passe par ces points est la droite d'équation $y = 0$, donc $M_i = (i, 0)$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$. Le seul vecteur harmonique $v$ tel que $v_1 = v_N = 0$ est donc le vecteur nul.

**A.4.c.** De la même manière, l'unique vecteur harmonique $v \in \mathbb{R}^N$ pour lequel $v_1 = \alpha$ et $v_N = \beta$ est tel que

$$\forall i \in \{1, \dots, N\} \qquad v_i \;=\; \alpha + (\beta - \alpha)\frac{i-1}{N-1}.$$

**A.4.d.** Le sev $H_N^1$ est de dimension 2, une base de $H_N^1$ est donc une famille libre à deux éléments de $H_N^1$. On peut par exemple prendre la famille $(v^1, v^2)$ où $v^1$ et $v^2$ sont définis par

$$\forall i \in \{1, \dots, N\} \qquad v_i^1 \;=\; 0 + (1-0)\frac{i-1}{N-1} \;=\; \frac{i-1}{N-1}.$$

et

$$\forall i \in \{1, \ldots, N\} \qquad v_i^2 \;=\; 1 + (0-1)\frac{i-1}{N-1} \;=\; \frac{N-i}{N-1}.$$

## B. Approche probabiliste.

**B.1.** Le résultat (R1) affirme que le marcheur partant de la position $j$ sortira “presque sûrement” (i.e. avec une probabilité 1) de l'intervalle $[\min(k,l), \max(k,l)]$, soit en passant par $k$ soit en passant par $l$: il a une probabilité nulle de rester infiniment dans l'intervalle $[\min(k,l)+1, \max(k,l)-1]$.

**B.2.** On remarque que $C_S(j, j-1, j+1) = \{X_1^S = -1\}$ et $C_S(j, j+1, j-1) = \{X_1^S = 1\}$ car le fait de passer d'abord par $j-1$ ou $j+1$ en partant de $j$ se décide dès le premier pas, donc

$$P(C_S(j, j-1, j+1)) = P(C_S(j, j+1, j-1)) = P(X_1^S = -1) = P(X_1^S = 1) = \frac{1}{2}.$$

**B.3.a.** On définit la suite de variables aléatoires $(Y_i^\sigma)_{i\geq 1}$ sur $(\Omega, P)$ par

$$\forall i \geq 1 \qquad Y_i^\sigma := X_{i+1}^S.$$

Ces v.a. sont toutes définies sur le même espace probabilisé, sont deux à deux indépendantes, de même loi

$$\forall i \geq 1 \qquad P(Y_i^\sigma = -1) \;=\; P(Y_i^\sigma = 1) \;=\; \frac{1}{2}$$

et on a

$$\forall j \in \mathbb{Z} \quad \forall n \geq 1 \qquad \sigma_n^j \;:=\; j + \sum_{i=1}^{n} Y_i^\sigma\,.$$

Donc $(\sigma_n^j)_{j\in\mathbb{Z}, n\geq 1}$ est une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.

**B.3.b.** On écrit

$$\begin{aligned}
P(C_S(j, j-1, l)) &= P_{(X_1^S=-1)}(C_S(j, j-1, l)) \times P(X_1^S = -1) \\
&\quad + P_{(X_1^S=1)}(C_S(j, j-1, l)) \times P(X_1^S = 1) \\
&= \frac{1}{2} P_{(X_1^S=-1)}(C_S(j, j-1, l)) \;+\; \frac{1}{2} P_{(X_1^S=1)}(C_S(j, j-1, l)) \\
&= \frac{1}{2} \times 1 \;+\; \frac{1}{2} P(C_\sigma(j+1, j-1, l))
\end{aligned}$$

car si l'évènement $X_1^S = -1$ se produit alors il en est de même de l'évènement $C_S(j, j-1, l)$ (d'où $P(C_S(j, j-1, l) | X_1^S = -1) = 1$), et lorsque $X_1^S = 1$ alors le marcheur suit la marche $(\sigma_n^j)_{j\in\mathbb{Z}, n\geq 1}$ en partant de la position $j+1$ (d'où $P(C_S(j, j-1, l) | X_1^S = 1) = P(C_\sigma(j+1, j-1, l))$).
En appliquant (R2) on obtient donc

$$P(C_S(j, j-1, l)) \;=\; \frac{1}{2} \;+\; \frac{1}{2} P(C_S(j+1, j-1, l)).$$

**B.3.c.** En raisonnant comme précédemment on obtient

$$\begin{aligned}
P(C_S(j, k, l)) &= P_{(X_1^S=1)}(C_S(j, k, l)) \times P(X_1^S = -1) + P_{(X_1^S=1)}(C_S(j, k, l)) \times P(X_1^S = 1) \\
&= \frac{1}{2} P(C_\sigma(j-1, k, l)) \;+\; \frac{1}{2} P(C_\sigma(j+1, k, l)) \\
&= \frac{1}{2} P(C_S(j-1, k, l)) \;+\; \frac{1}{2} P(C_S(j+1, k, l)).
\end{aligned}$$

en appliquant encore (R2).

**B.4.a.** On déduit de B.3.c que la v.a. $Y_2$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

**B.4.b.** On remarque que pour tout $j \in \{2, \dots, N-1\}$ on a

$$\mathbb{E}(Y_j) \;=\; 1 \times P(C_S(j, N, 1)) \;=\; P(C_S(j, N, 1)) \;=\; 1 - P(C_S(j, 1, N)).$$

Pour $j = 2$, on utilise B.3.b et on calcule :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_2) &= 1 - P(C_S(2, 1, N)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}P(C_S(3, 1, N)) \\ &= \frac{1}{2}P(C_S(3, N, 1)) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_3) = \frac{\mathbb{E}(Y_1) + \mathbb{E}(Y_3)}{2}\end{aligned}$$

car $\mathbb{E}(Y_1) = 0$.
Pour $j \in \{3, \dots, N-2\}$, on utilise B.3.c. pour obtenir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_j) &= 1 - P(C_S(j, 1, N)) = 1 - \frac{1}{2}P(C_S(j-1, 1, N)) - \frac{1}{2}P(C_S(j+1, 1, N)) \\ &= \frac{1}{2}P(C_S(j-1, N, 1)) + \frac{1}{2}P(C_S(j+1, N, 1)) = \frac{\mathbb{E}(Y_{j-1}) + \mathbb{E}(Y_{j+1})}{2}.\end{aligned}$$

Pour $j = N-1$, on utilise un raisonnement analogue à celui de B.3.b. pour obtenir que

$$P(C_S(N-1, N, 1)) \;=\; \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P(C_S(N-2, N, 1))$$

et conclure que $\mathbb{E}(Y_{N-1}) = \frac{\mathbb{E}(Y_{N-2})+\mathbb{E}(Y_N)}{2}$ (remarque: $\mathbb{E}(Y_N) = 1$).

**B.5.a.** Pour $i \in \{2, \dots, N-1\}$ on a

$$\begin{aligned}v_i &= \mathbb{E}(Z_i) = \mathbb{E}(\alpha + (\beta - \alpha)Y_i) \;=\; \alpha + (\beta - \alpha)\mathbb{E}(Y_i) \\ &= \alpha + (\beta - \alpha)\frac{\mathbb{E}(Y_{i-1}) + \mathbb{E}(Y_{i+1})}{2} \\ &= \frac{\alpha + (\beta - \alpha)\mathbb{E}(Y_{i-1}) + \alpha + (\beta - \alpha)\mathbb{E}(Y_{i+1})}{2} = \frac{\mathbb{E}(Z_{i-1}) + \mathbb{E}(Z_{i+1})}{2} = \frac{v_{i-1} + v_{i+1}}{2}\end{aligned}$$

et donc $v$ est harmonique.

**B.5.b.** Puisque $v$ est harmonique, $v_1 = \alpha$ et $v_N = \beta$, on obtient par identification dans la formule A.4.c. que

$$\forall i \in \{2, \dots, N-1\} \qquad \mathbb{E}(Y_i) = \frac{i-1}{N-1}$$

et donc

$$\forall i \in \{2, \dots, N-1\} \qquad P(C_S(i, 1, N)) \;=\; 1 - \mathbb{E}(Y_i) \;=\; \frac{N-i}{N-1}.$$

## Partie II: cas de la dimension 2.

### A. Approche algèbrique.

**A.0.** On vérifie que

$$a_{2,2} = 1 = \frac{a_{1,2} + a_{2,3} + a_{3,2} + a_{2,1}}{4} \quad et \quad a_{2,3} = 2 = \frac{a_{1,3} + a_{2,4} + a_{3,3} + a_{2,2}}{4}$$

donc $A$ est harmonique.
Comme $b_{2,2} = 2 \neq \frac{5}{4} = \frac{b_{1,2}+b_{2,3}+b_{3,2}+b_{2,1}}{4}$, $B$ n'est pas harmonique.
On vérifie que

$$c_{2,2} = 1 = \frac{c_{1,2} + c_{2,3} + c_{3,2} + c_{2,1}}{4} \quad et \quad c_{2,3} = 1 = \frac{c_{1,3} + c_{2,4} + c_{3,3} + c_{2,2}}{4}$$

donc $C$ est harmonique.

**A.1.a.** Puisque $A$ est harmonique, on sait que

$$a_{i,j} \;=\; \frac{a_{i-1,j}+a_{i+1,j}+a_{i,j-1}+a_{i,j+1}}{4}$$

Si $a_{i,j} \;=\; \max\{a_{i-1,j},a_{i+1,j},a_{i,j-1},a_{i,j+1}\}$ alors

$$a_{i,j} \;=\; \frac{a_{i-1,j}+a_{i+1,j}+a_{i,j-1}+a_{i,j+1}}{4} \;\leq\; \frac{4\times\max\{a_{i-1,j},a_{i+1,j},a_{i,j-1},a_{i,j+1}\}}{4} \;=\; a_{i,j}$$

et donc l'inégalité est une égalité, d'où $a_{i,j}=a_{i-1,j}=a_{i+1,j}=a_{i,j-1}=a_{i,j+1}$. Ceci est donc une condition nécessaire, qui est évidemment suffisante.

**A.1.b.** On pose $\alpha := \max\{a_{i,j}\,:\,(i,j)\in I\}$ et on suppose que

$$\alpha > \max\{a_{i,j}\,:\,(i,j)\in J\setminus I\}$$

On remarque que cela implique que $\alpha=\max\{a_{i,j}\,:\,(i,j)\in J\}$
On définit

$$k := \min\{i\,:\,\exists(i,j)\in I \quad a_{i,j}=\alpha\}$$

et on choisit $l\in\{2,\ldots,N-1\}$ tel que $a_{k,l}=\alpha$.
On démontre d'abord par l'absurde que $k=2$. Si on suppose $k>2$, on déduit de la question précédente et du fait que $\alpha=\max\{a_{i,j}\,:\,(i,j)\in J\}$ que

$$a_{k,l}=a_{k-1,l}=a_{k,l+1}=a_{k+1,l}=a_{k,l-1}.$$

Or puisque $k>2$ on remarque que $(k-1,l)$ appartient à $I$, et comme $a_{k-1,l}=\alpha$ on obtient une contradiction avec la définition de $k$. On a donc prouvé que $k=2$.
On applique à nouveau le fait que $\alpha=\max\{a_{i,j}\,:\,(i,j)\in J\}$, et on obtient de même que

$$a_{2,l}=a_{1,l}=a_{2,l+1}=a_{3,l}=a_{2,l-1}.$$

Or $(1,l)$ appartient à $J\setminus I$, et donc

$$\alpha \;\leq\; \max\{a_{i,j}\,:\,(i,j)\in J\setminus I\}$$

en contradiction avec l'hypothèse de départ, ce qui conclut la preuve.

**A.1.c.** On pose $B=-A$. Puisque $B$ est harmonique, en lui appliquant le résultat de A.1.b. on obtient

$$\min\{a_{i,j}\,:\,(i,j)\in I\} \;\geq\; \min\{a_{i,j}\,:\,(i,j)\in J\setminus I\}.$$

**A.1.d.** Si $a_{i,j}=0$ pour tout $(i,j)\in J\setminus I$ alors

$$\min\{a_{i,j}\,:\,(i,j)\in J\setminus I\} \;=\; \max\{a_{i,j}\,:\,(i,j)\in J\setminus I\} \;=\; 0$$

D'après les deux questions précédentes on obtient alors que

$$0 \;\leq\; \min\{a_{i,j}\,:\,(i,j)\in I\} \;\leq\; \max\{a_{i,j}\,:\,(i,j)\in I\} \;\leq\; 0$$

et donc tous les coefficients de $A$ sont nuls.

**A.2.a.** Par définition de $g$, si $A$ est dans son noyau alors en particulier $g(A)_{i,j}=0$ pour tout $(i,j)\in I$, et donc

$$\forall(i,j)\in I \qquad a_{i,j} \;=\; \frac{a_{i-1,j}+a_{i+1,j}+a_{i,j-1}+a_{i,j+1}}{4}.$$

Ainsi si $g(A)=0$ alors $A\in H^2_{N,K}$.

**A.2.b.** Si $A$ est dans le noyau de $g$, alors en particulier $g(A)_{i,j}=0$ pour tout $(i,j)\in J\setminus I$. De plus, $A$ est harmonique d'après la question précédente. On conclut alors de A.1.d que tous les coefficients de $A$ sont nuls: le seul élément du noyau de $g$ est donc la matrice écornée $A$ dont tous les coefficients sont nuls, donc l'application linéaire $g$ est injective.

**A.2.c.** L'endomorphisme $g : E \to E$ étant injectif, il est bijectif. Soit alors $(b_{i,j})_{(i,j)\in J\setminus I}$, on définit l'élément $C = (c_{i,j})_{(i,j)\in J}$ de $E$ par

$$\begin{cases} \forall (i,j) \in J \setminus I & c_{i,j} \;=\; b_{i,j}, \\ \forall (i,j) \in I & c_{i,j} \;=\; 0. \end{cases}$$

Puisque $g$ est bijectif, $C$ a un unique antécédent par $g$, qui est l'un unique élément $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in J}$ de $E$ harmonique et tel que

$$\forall (i,j) \in J \setminus I \qquad a_{i,j} \;=\; b_{i,j}.$$

**A.2.d.** On déduit de la question précédente que la dimension de $H^2_{N,K}$ est $2N + 2K - 8$.

## B. Approche numérique.

**B.0.** On obtient

$$A_1 = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ & 2 & 1 & \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & \\ 0 & \frac{15}{16} & \frac{15}{16} & 0 \\ & 2 & 1 & \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & \\ 0 & \frac{63}{64} & \frac{63}{64} & 0 \\ & 2 & 1 & \end{bmatrix}.$$

**B.1.** Comme $A$ est harmonique, on obtient directement des définitions que $h(A) = A$, donc $A$ est un point fixe de $h$ sur $E_b$.
Soit $C = (c_{i,j})_{(i,j)\in J}$ un point fixe de $h$ sur $E_b$. Comme $h(C) = C$, on en déduit que $C$ est une matrice écornée harmonique. De plus, comme $C$ appartient à $E_b$ on sait que $c_{i,j} = b_{i,j}$ pour tout $(i,j) \in J \setminus I$. D'après la question A.2.c., on obtient que $C = A$. On a donc obtenu que $A$ est l'unique point fixe de $h$ sur $E_b$.

**B.2.a.** Soit $D \in E$. Pour alléger les notations, on note $(c_{i,j})_{(i,j)\in J} := h(D - A)$. On a alors:

$$\begin{aligned} \sup_{(i,j)\in I} |c_{i,j}| &= \max_{(i,j)\in I} \left| \frac{d_{i-1,j} - a_{i-1,j} + d_{i+1,j} - a_{i+1,j} + d_{i,j-1} - a_{i,j-1} + d_{i,j+1} - a_{i,j+1}}{4} \right| \\ &\le \max_{(i,j)\in I} \frac{|d_{i-1,j} - a_{i-1,j}| + |d_{i+1,j} - a_{i+1,j}| + |d_{i,j-1} - a_{i,j-1}| + |d_{i,j+1} - a_{i,j+1}|}{4} \\ &\le \max_{(i,j)\in J} |d_{i,j} - a_{i,j}| \;=\; \|D - A\|_\infty \end{aligned}$$

et comme

$$\max_{(i,j)\in J\setminus I} |c_{i,j}| \;=\; \max_{(i,j)\in J\setminus I} |d_{i,j} - a_{i,j}| \;\le\; \|D - A\|_\infty$$

on obtient l'inégalité demandée.

**B.2.b.** Puisque $h$ est linéaire et $A$ est un point fixe de $h$ on a

$$\forall n \ge 0 \qquad \|A_{n+1} - A\|_\infty \;=\; \|h(A_n) - h(A)\|_\infty \;=\; \|h(A_n - A)\|_\infty \;\le\; \|A_n - A\|_\infty$$

et donc la suite $(\|A_n - A\|_\infty)_n$ est décroissante.
On en déduit que

$$\forall n \ge 0 \qquad \|A_n\|_\infty \le \|A_n - A\|_\infty + \|A\|_\infty \le \|A_0 - A\|_\infty + \|A\|_\infty =: M.$$

**B.3.a.** Soit $D \in E_b$ avec $D \neq A$. On sait par la question B.2.a. que $\|h(D - A)\|_\infty \le \|D - A\|_\infty$, et on montre par l'absurde que $\|h(D - A)\|_\infty \neq \|D - A\|_\infty$. Pour alléger les notations, on note $(c_{i,j})_{(i,j)\in J} := h(D - A)$. Puisque $D \in E_b$, on a $c_{i,j} = 0$ pour tout $(i,j) \in J \setminus I$, donc

$$\|h(D - A)\|_\infty = \max\{|c_{i,j}| : (i,j) \in I\}.$$

Soit $k := \min\{i \geq 1 \ : \ \exists l, \ |c_{i,j}| = \|h(D-A)\|_\infty\}$ et soit $l$ tel que $c_{k,l} = \|h(D-A)\|_\infty$. Comme $D \neq A$ et $c_{1,j} = 0$ pour tout $j \in \{2, \dots, N-1\}$ on a nécessairement $k \neq 1$ et donc $k \geq 2$. De même, $l$ appartient forcément à $\{2, \dots, N-1\}$. Alors si $\|h(D-A)\|_\infty = \|D-A\|_\infty$ on a :

$$\begin{aligned}
\|D-A\|_\infty &= \|h(D-A)\|_\infty = |c_{k,l}| \\
&= \left| \frac{d_{k-1,l} - a_{k-1,l} + d_{k+1,l} - a_{k+1,l} + d_{k,l-1} - a_{k,l-1} + d_{k,l+1} - a_{k,l+1}}{4} \right| \\
&\leq \frac{|d_{k-1,l} - a_{k-1,l}| + |d_{k+1,l} - a_{k+1,l}| + |d_{k,l-1} - a_{j,l-1}| + |d_{j,l+1} - a_{k,l+1}|}{4} \\
&\leq \max_{(i,j)\in J} |d_{i,j} - a_{i,j}| \ = \ \|D-A\|_\infty
\end{aligned}$$

et donc les inégalités sont des égalités. En particulier

$$|c_{k-1,l}| \ = \ |d_{k-1,l} - a_{k-1,l}| \ = \ \|h(D-A)\|_\infty$$

ce qui contredit la définition de $k$, et termine la preuve.

**B.3.b.** Soit $\alpha \in ]0, M]$, alors l'application $D \mapsto \frac{\|h(D-A)\|_\infty}{\|D-A\|_\infty}$ est bien définie et continue sur le compact $\{D \in E_B : \|D-A\|_\infty \in [\alpha, M]\}$ (il faut remarquer que cet ensemble est fermé et borné dans $E$, qui est de dimension finie), donc elle atteint son maximum $\beta$ en un élément $D'$ de ce compact. Comme $\alpha > 0$ on a $D' \neq A$, et d'après la question précédente, on a nécessairement

$$\beta \ = \ \frac{\|h(D'-A)\|_\infty}{\|D'-A\|_\infty} \ < \ 1.$$

**B.3.c.** La suite $(\|A_n - A\|_\infty)_n$ est positive et décroissante, donc elle a une limite positive.
On démontre par l'absurde que cette limite est nulle. Supposons que cette limite soit $\alpha > 0$, alors en appliquant le résultat de la question précédente on obtient qu'il existe $\beta \in ]0, 1[$ tel que

$$\forall D \in E_B \qquad \|D-A\|_\infty \in [\alpha, M] \ \Rightarrow \ \|h(D-A)\|_\infty \ \leq \ \beta \|D-A\|_\infty.$$

Puisque $A_n \in E_B$ et $\|A_n - A\|_\infty \in [\alpha, M]$ pour tout $n \geq 0$, on a donc

$$\forall n \geq 0 \qquad \|A_{n+1} - A\|_\infty \ \leq \ \beta \|A_n - A\|_\infty \ \leq \ \dots \ \leq \ \beta^{n+1} \|A_0 - A\|_\infty.$$

Comme $0 < \beta < 1$, on en déduit que $(\|A_n - A\|_\infty)_n$ tend vers 0, ce qui contredit l'hypothèse de départ, et achève la démonstration.

**FIN.**